

# Séquences temporelles d'informations qualitatives : raisonner sur la topologie de régions mobiles de taille constante \*

Quentin Cohen-Solal

Maroua Bouzid

Alexandre Niveau

Normandie Univ, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, 14000 Caen, France  
{quentin.cohen-solal, maroua.bouzid-mouaddib, alexandre.niveau}@unicaen.fr

## Résumé

Nous présentons une approche générale pour le raisonnement sur des séquences temporelles d'informations qualitatives. Cette approche, qui s'appuie sur le cadre récemment introduit des *multialgèbres*, est de façon générale plus efficace computationnellement que les techniques de la littérature. Nous appliquons notre approche au cas spécifique des séquences d'informations topologiques sur des régions de taille constante ; nous montrons que le formalisme obtenu dispose d'une procédure complète pour la décision de la cohérence, et nous identifions ses trois sous-classes maximales contenant toutes les relations basiques.

## Abstract

Relying on the recently introduced *multi-algebras*, we present a general approach for reasoning about temporal sequences of qualitative information that is generally computationally more efficient than existing techniques. Applying our approach to the specific case of sequences of topological information about constant-size regions, we show that the resulting formalism has a complete procedure for deciding consistency, and we identify its three maximal tractable subclasses containing all basic relations.

## 1 Introduction

La prise en compte des informations temporelles *et* spatiales est essentielle à la résolution de tâches complexes dans un environnement physique et dynamique. Un certain nombre de *formalismes qualitatifs* de différentes expressivités ont été proposés pour décrire le monde et raisonner sur celui-ci [voir par ex. Chen *et al.*, 2015]. Certains, en particulier, permettent de raisonner à la fois avec des informations de nature temporelle et de nature spatiale. Par exemple, les *séquences temporelles d'informations qualitatives*, sur lesquelles porte cet article, sont des séquences

de descriptions, chacune représentant l'état du monde à un moment spécifique. Parmi les tâches de raisonnement associées à de telles séquences, on peut citer leur ordonnancement [Sioutis *et al.*, 2015] ainsi que leur construction lors d'une interpolation visant à déterminer les états intermédiaires entre deux états du monde – utile par exemple dans le cadre de la planification spatiale [Ragni et Wölfl, 2005; Westphal *et al.*, 2011; Wolter et Kreutzmann, 2015]. La tâche fondamentale de raisonnement est cependant la *décision de la cohérence* de ces séquences temporelles. Ce problème de décision est complexe, car en général la cohérence temporelle et la cohérence spatiale ne peuvent être décidées indépendamment. De plus, la cohérence d'une description dépend des propriétés spatio-temporelles des *entités* décrites. Par exemple, garantir la continuité du mouvement est essentiel dans le cadre du raisonnement à propos d'environnements physiques [Galton, 2000; Hazarika et Cohn, 2001; Muller, 2002]. Il peut également être nécessaire d'assurer que certains attributs des entités – tels que la taille, la position, l'orientation ou la forme – soient préservés au cours du temps, et d'imposer des restrictions sur le mouvement *entre* les instants consécutifs de la séquence. Ces contraintes créent des *interdépendances* qui affectent la cohérence des descriptions.

**Exemple 1.** Considérons la séquence temporelle suivante : une boîte bleue est dans une boîte rouge durant une première période ; durant une seconde période, la boîte rouge est dans une boîte verte, et soit la boîte bleue est dans la boîte rouge, soit la rouge est dans la bleue ; durant une troisième période, la boîte verte est dans la boîte bleue. Cette description est cohérente pour des boîtes déformables mais est incohérente pour des boîtes rigides. En effet, avec des boîtes rigides, la description de la première période permet de déduire que la boîte bleue est dans la boîte verte durant la seconde période, ce qui est contradictoire avec la description de la troisième période.

\*La version originale (en anglais) de cet article a été publiée dans les actes de la conférence IJCAI 2017 [Cohen-Solal *et al.*, 2017c].

De nombreuses approches représentent les interdépendances en utilisant des *graphes de voisinage (conceptuel)* [Freksa, 1992; Egenhofer, 2010]. Notons que l'incohérence de la description de l'exemple 1 ne dépend que du fait que la *taille* des objets soit constante : le fait que les boîtes soient indéformables n'est pas utilisé directement. La préservation de la taille est ainsi une interdépendance temporelle importante, requise en particulier pour raisonner à propos d'objets rigides, mais également nécessaire lorsque l'on considère des régions déformables ayant une taille constante, comme des corps solides articulés, des corps déformables (pour certaines déformations) ou des liquides. Malheureusement, peu de formalismes portent sur des régions de taille constante et, comme nous allons le voir, ils ont tous des désavantages significatifs.

Dans cet article, nous proposons un cadre général pour raisonner à propos des séquences temporelles d'informations qualitatives, basé sur les *multialgèbres* récemment introduites [Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b]. Notre approche permet de représenter de nombreux types d'interdépendances, comme celles des graphes de voisinage, et elle a de meilleurs propriétés computationnelles que les approches connues. En outre, nous instancions notre cadre dans le cas spécifique des *séquences d'informations topologiques sur des régions de taille constante évoluant continûment* (telles que les corps rigides ou articulés). D'une part, nous montrons que le formalisme résultant est *complet* pour la décision de la cohérence ; d'autre part, en appliquant les théorèmes du cadre des multialgèbres, nous identifions les trois *sous-classes* de ce formalisme qui sont maximales pour la traitabilité et contiennent toutes les relations *basiques*.

L'article est organisé comme suit : la section suivante présente les formalismes qualitatifs, le raisonnement spatio-temporel et les travaux connexes. Dans la section 3, nous présentons le cadre formel récemment introduit des multialgèbres, montrons comment il peut être utilisé pour raisonner sur les séquences temporelles, et décrivons ses avantages computationnels. Pour finir, la section 4 est dédiée aux propriétés fondamentales du cas spécifique des informations topologiques sur des régions de taille constante.

## 2 Contexte et travaux connexes

### 2.1 Formalismes qualitatifs

Nous rappelons les concepts principaux relatifs au raisonnement sur le temps et sur l'espace [Ligozat, 2013]. Dans le contexte du raisonnement qualitatif, les informations à propos des entités temporelles et spatiales du monde sont représentées par des *relations binaires* provenant d'un ensemble fini  $\mathcal{B}$ , constituant le vocabulaire de base des descriptions. Par exemple, la taille relative entre deux entités  $x$  et  $y$  est entièrement caractérisée par l'un des éléments de l'ensemble  $\mathcal{B}_{PA} = \{<, =, >\}$ . Les relations de  $\mathcal{B}$  sont qua-

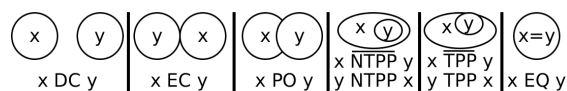


FIGURE 1 – Les 8 relations de RCC8 dans le plan.

lifiées de *basiques*. Les relations basiques sont disjointes (deux entités satisfont au plus une relation basique) et généralement exhaustives (deux entités satisfont au moins une relation basique). Une *relation (composite)* est un ensemble de relations basiques, c'est-à-dire un sous-ensemble de  $\mathcal{B}$ , ce qui permet de représenter une incertitude sur la relation basique satisfaite. Par exemple, «  $x \{<, =\} y$  » signifie que soit  $x < y$  soit  $x = y$ , alors que «  $x \mathcal{B}_{PA} y$  » ne donne aucune information. L'ensemble  $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{B}}$  de toutes les relations construites à partir de  $\mathcal{B}$  forme une *algèbre non associative* [Ligozat, 2013, ch. 11]. L'*algèbre des points* PA [Vilain *et al.*, 1989], dont l'ensemble des relations basiques est  $\mathcal{B}_{PA}$ , est un des exemples les plus simples. Une autre algèbre bien connue est RCC8, qui décrit les *relations topologiques* [Cohn *et al.*, 1997] entre *régions*, c'est-à-dire, dans cet article, des sous-ensembles non vides, clos et réguliers de  $\mathbb{R}^d$ . Les relations basiques de RCC8 sont illustrées dans la figure 1.

Les descriptions du monde sont souvent données sous forme de *réseaux de contraintes qualitatives*. Un réseau  $N$  sur une algèbre  $\mathcal{A}$  est un ensemble de relations de  $\mathcal{A}$  (des *contraintes*), une pour chaque paire de *variables d'entité*. L'ensemble des variables est noté  $E$ . De plus, nous notons  $N^{xy}$  la relation entre les variables  $x$  et  $y$  (implicitement,  $N^{yx} = \overline{N^{xy}}$ ). Par exemple, le réseau tel que  $N^{xy} = \{PO\}$ ,  $N^{yz} = \{TPP\}$  et  $N^{xz} = \{DC\}$  décrit la topologie de trois entités inconnues  $x, y, z$ . Notons que toutes les relations sont basiques dans ce réseau : il est qualifié de *scénario*. Une question fondamentale à propos d'une telle description est sa cohérence : peut-on trouver des entités qui satisfont chacune de ses contraintes ? Les algèbres sont en fait dotées d'opérateurs sur leur relations : l'*intersection*  $\cap$ , l'*inversion*  $\bar{\cdot}$ , et la *composition (faible)*  $\diamond$ , qui permettent une forme de raisonnement déductif. Leur application peut retirer des relations basiques d'une relation composite et ainsi diminuer l'incertitude sur la relation basique satisfaite. Nous avons les implications suivantes :

$$\begin{aligned} x r y &\iff y \bar{r} x \\ x r_1 y \wedge x r_2 y &\iff x (r_1 \cap r_2) y \\ x r_1 y \wedge y r_2 z &\implies x (r_1 \diamond r_2) z \end{aligned}$$

Par exemple, des deux premières contraintes du scénario  $N$  décrit précédemment, nous pouvons inférer que la relation basique entre  $x$  et  $z$  doit être dans  $\{PO, NTPP, TPP\}$  ; puisque cet ensemble est disjoint de la relation  $N^{xz}$ , nous en concluons que ce scénario est incohérent.

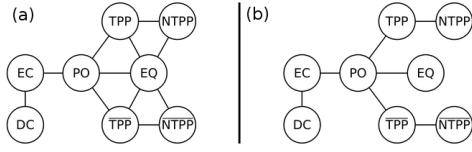


FIGURE 2 – Graphes de voisinage de RCC8 : (a) si la taille des régions peut changer ; (b) pour des régions de taille constante.

## 2.2 Graphes de voisinage

Les graphes de voisinage ont été proposés pour raisonner à propos du changement [Freksa, 1992]. Ils encodent la façon dont les relations entre entités peuvent changer au cours du temps : deux relations basiques sont connectées dans un graphe de voisinage si en déformant continûment deux entités satisfaisant la première relation, on peut faire en sorte qu’elles satisfassent la seconde relation sans qu’aucune autre relation ne soit satisfaite durant la déformation. Les deux graphes de la figure 2 [Gerevini et Nebel, 2002] montrent le voisinage des relations topologiques, pour des régions de taille variable et de taille constante. Supposons que TPP soit satisfaite entre deux régions ; la figure 2.a montre que si on déforme ces régions continûment jusqu’à ce que TPP ne soit plus satisfaite, la nouvelle relation ne peut être que NTPP, PO ou EQ en général. Cependant, si la taille des régions est constante, alors la figure 2.b indique que la relation ne peut être que NTPP ou PO.

Une des applications des graphes de voisinage est de garantir qu’une *séquence temporelle* de scénarios  $N_1, \dots, N_m$  – chaque  $N_i$  décrivant la situation à un instant fixé  $t_i$  – est compatible avec la propriété de *continuité sans relation intermédiaire* (ou *changement qualitatif continu*) [Westphal *et al.*, 2013], qui est notamment utile dans le cadre de la planification qualitative [Ragni et Wöflf, 2005; Westphal *et al.*, 2011]. Une séquence temporelle de scénarios est considérée cohérente s’il existe des entités évoluant continûment qui satisfont chaque réseau  $N_i$  à l’instant  $t_i$  ; la continuité sans relation intermédiaire ajoute la condition qu’à n’importe quel moment *entre* deux instants fixés et consécutifs  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , chaque paire d’entités  $\{x, y\}$  doit satisfaire soit  $N_i^{xy}$  soit  $N_{i+1}^{xy}$ . Par exemple, la séquence «  $x$  TPP  $y$ , puis  $x$  DC  $y$  » n’a aucune solution sans relation intermédiaire ; en fait, une séquence temporelle  $(r_1, \dots, r_m)$  de relations basiques de RCC8 satisfait la continuité sans relation intermédiaire si et seulement si elle *respecte* le graphe de voisinage de RCC8, c’est-à-dire que pour  $1 \leq i < m$ , soit  $r_i = r_{i+1}$ , soit  $(r_i, r_{i+1})$  est un arc dans le graphe.

## 2.3 Travaux connexes

Il existe de nombreuses études sur le changement qualitatif, en particulier basé sur les graphes de voisinage [e.g., Wu *et al.*, 2014; Santos et Moreira, 2009; Bogaert *et al.*, 2006; Van de Weghe et De Maeyer, 2005; Cohn et Haza-

rika, 2001; Zimmermann et Freksa, 1993], et sur ses applications [e.g., Cui *et al.*, 1992; Dylla et Wallgrün, 2007]. En particulier, les graphes de voisinage ont été utilisés dans le cadre de la simulation qualitative [Cohn *et al.*, 1998] et des formalismes de planification [Dylla et Moratz, 2004].

D’un autre côté, le raisonnement à propos des séquences temporelles n’est pas largement étudié : sur le sujet nous n’avons connaissance que de l’approche générale de Westphal *et al.* [2013], qui duplique toutes les variables pour chaque instant afin d’ajouter des *contraintes de transition* (non binaires) imposant les interdépendances.

Cependant, des formalismes spatio-temporels de plus haute expressivité ont été étudiés, dans lesquels l’ordre des entités temporelles est incertain. Les descriptions du formalisme de Gerevini et Nebel [2002] consistent en des contraintes entre des intervalles temporels ainsi que des contraintes de RCC8 entre des régions, satisfaites durant ces intervalles : par ex., un intervalle  $I$  est avant ou après un autre intervalle, et durant  $I$  la relation  $\{DC, PO\}$  est satisfaite entre deux régions. Ragni et Wöflf [2006] ont introduit un formalisme similaire pour les relations directionnelles entre des points de l’espace. L’approche de Sioutis *et al.* [2014] a une expressivité différente – en particulier les entités temporelles sont des points et non des intervalles.

Nous ne connaissons pas d’autre formalisme spatio-temporel qualitatif et algébrique, mais le raisonnement spatio-temporel est également étudié dans le cadre des logiques spatio-temporelles [Bennett *et al.*, 2002], qui sont plus expressives, mais moins performantes : alors que le problème de décision de la cohérence est typiquement NP-complet pour les approches algébriques, il est généralement PSPACE-difficile pour les logiques.

Seules deux approches, à notre connaissance, traitent de la préservation de la taille dans le contexte de relations topologiques. La première est la logique de Galton [1993], basée sur la *logique temporelle d’Allen*. Elle permet de raisonner sur les relations topologiques entre corps rigides, mais nécessite de connaître la relation de taille précise pour chaque paire de régions. La seconde est le formalisme de Gerevini et Nebel [2002] mentionné précédemment. Il impose la préservation de la taille grâce à la *combinaison taille-topologie*, en dupliquant toutes les variables pour chaque intervalle temporel. Il garantit également une évolution sans relation intermédiaire grâce au graphe de voisinage de la figure 2.b. Cependant, il n’est pas clair que ce formalisme permet de garantir la *continuité* du mouvement ; de plus, aucun algorithme n’a été proposé pour raisonner à propos des descriptions non basiques.

## 3 Multialgèbres des séquences temporelles

Les multialgèbres ont récemment été introduites [Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b] dans le but d’englober au sein d’un cadre algébrique commun plusieurs formes de combi-

naisons, notamment les intégrations lâches [Wölfl et Westphal, 2009] et les représentations multiéchelles [Cohen-Solal *et al.*, 2015], mais également les séquences temporelles. Cette dernière application a été illustrée avec l'exemple simple des séquences temporelles d'informations directionnelles (c'est-à-dire des relations de PA) qui impose la continuité sans relation intermédiaire. Nous montrons ici comment cette approche se généralise à n'importe quel formalisme qualitatif, et comment elle peut être adaptée au contexte de la préservation de la taille, en l'illustrant dans le cadre des relations de RCC8.

### 3.1 Séquences temporelles et projections

La relation entre deux entités dans une séquence temporelle d'informations qualitatives peut être vue comme un  $m$ -uplet de relations, la  $i$ -ème relation étant celle satisfaite au  $i$ -ème instant de la séquence. Ainsi, la séquence dans laquelle une région  $x$  est à l'intérieur d'une autre région  $y$ , qui la chevauche ensuite, pour finalement en être disjointe, correspond au triplet  $(\{TPP, NTPP\}, \{PO\}, \{EC, DC\})$ . Les multialgèbres permettent de représenter les relations de cette forme : une multialgèbre étant en effet un produit cartésien  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$ , une *relation d'une multialgèbre* est un  $m$ -uplet  $R = (R_1, \dots, R_m)$  de relations classiques  $R_i \in \mathcal{A}_i$ . La multialgèbre des séquences d'informations topologiques avec  $m$  instants est ainsi simplement  $RCC8^m$ . Les algèbres dans le produit peuvent cependant aussi être distinctes, ce qui permet de combiner des informations de nature hétérogène au sein d'une même relation : les multialgèbres généralisent en fait les *intégrations lâches*. Par exemple, la combinaison bien connue des tailles qualitatives et de la topologie [Gerevini et Renz, 2002] correspond à la multialgèbre  $RCC8 \times PA$ . Sa relation  $(\{DC\}, \{<, =\})$  décrit le fait que deux régions sont déconnectées et que la première est de taille inférieure ou égale.

Sur de nombreux aspects, une multialgèbre se comporte comme un ensemble d'algèbres indépendantes : on peut généraliser plusieurs notions classiques aux multialgèbres de manière transparente en les considérant *composante par composante*. Ainsi, pour deux relations  $R$  et  $R'$ , nous écrivons  $R \subseteq R'$  si  $R_i \subseteq R'_i$  est satisfaite pour chaque  $i$ , et  $R$  est dit *basique* si chaque  $R_i$  est basique. De plus, les multialgèbres sont dotées d'opérateurs de composition, d'inversion et d'intersection qui s'appliquent composante par composante (par ex.,  $R \diamond R'$  est défini par  $\forall i: (R \diamond R')_i = R_i \diamond R'_i$ ). Cela fait sens pour les séquences temporelles puisque cela revient à appliquer les opérateurs classiques indépendamment sur les descriptions de chaque instant.

Néanmoins, les éléments du  $m$ -uplet ne sont pas toujours indépendants. Par exemple, dans le but de garantir la continuité sans relation intermédiaire sur les séquences temporelles, chaque paire de relations successives doit satisfaire le graphe de voisinage. Avec les multialgèbres,

$b$	TPP	NTPP	PO	EC	DC	EQ
$\uparrow_{RCC8}^{PA} b$	<	<	$\mathcal{B}_{PA}$	$\mathcal{B}_{PA}$	$\mathcal{B}_{PA}$	=
$b$	<			=		
$\uparrow_{PA}^{RCC8} b$	TPP NTPP	PO EC DC	EQ PO EC DC			

TABLE 1 – Projections des relations basiques entre RCC8 et PA.

les interdépendances de ce type entre composantes individuelles sont imposées par des opérateurs additionnels, appelés *projections*. Il y a une projection pour chaque couple d'algèbres dans le produit cartésien, qui représente les interdépendances entre les relations de ces deux algèbres. Formellement, une projection  $\uparrow_i^j : \mathcal{A}_i \mapsto \mathcal{A}_j$  est une fonction associant à chaque relation  $r$  de l'algèbre  $\mathcal{A}_i$  la relation  $r'$  de l'algèbre  $\mathcal{A}_j$  correspondant à la sémantique suivante : si  $r$  est satisfaite, alors  $r'$  l'est également. Par exemple, la table 1 indique les projections des relations basiques de la combinaison taille-topologie. La projection de  $\{TPP\}$  vers PA est  $\uparrow_{RCC8}^{PA} \{TPP\} = \{<\}$ , puisqu'une région strictement incluse dans une autre ne peut avoir qu'une taille plus petite. Les projections des relations non basiques peuvent être déduites de la table en utilisant les formules  $\uparrow r = \bigcup_{b \in r} \uparrow \{b\}$  et  $\uparrow \bar{r} = \bigcup_{b \in \bar{r}} \{\bar{b}\}$ .

Les projections peuvent être utilisées pour garantir qu'une séquence temporelle respecte un graphe de voisinage  $G$  quelconque. Puisque le respect de  $G$  impose des restrictions sur les relations des instants successifs, mais n'impose rien dans les autres cas, la projection de  $b \in \mathcal{B}$  d'un instant  $i$  vers un autre instant  $j$  est définie par :

$$\uparrow_i^j \{b\} = \begin{cases} \{b' : \{b, b'\} \in G\} \cup \{b\} & \text{if } |i - j| = 1, \\ \mathcal{B} & \text{if } |i - j| > 1. \end{cases}$$

Ainsi, étant donné une algèbre  $\mathcal{A}$  et un graphe de voisinage  $G$ , on peut construire une multialgèbre représentant les séquences temporelles d'informations provenant de  $\mathcal{A}$  dans le contexte de la continuité sans relation intermédiaire. Dans le cas des informations topologiques, on obtient la définition suivante.

**Définition 2.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . La multialgèbre  $TT_{sri}$  de la *topologie temporalisée sans relation intermédiaire* est le produit cartésien  $RCC8^m$  doté des projections imposant le graphe de voisinage de la figure 2.a.

Cependant, si on veut raisonner à propos de régions de taille constante, les graphes de voisinage ne suffisent pas. Considérons la relation  $(TPP, PO, TPP)$  : elle respecte le graphe de la figure 2.b, bien qu'aucune paire de régions de taille constante ne la satisfasse. Ce problème peut être résolu en raisonnant *explicitement* sur les tailles des régions, en plus du raisonnement spatial. Dans le cadre des multialgèbres, cela peut être effectué en ajoutant l'algèbre des points au produit cartésien. Pour le raisonnement topologique, on obtient  $RCC8^m \times PA$  : chaque relation est un

$(m+1)$ -uplet contenant  $m$  relations topologiques (une pour chaque instant) ainsi qu'une relation en plus indiquant la taille relative des deux régions. Les projections vers et depuis l'algèbre ajoutée sont exactement celles de la combinaison taille-topologie – qui est donc un cas particulier ( $m = 1$ ) de cette multialgèbre.

**Definition 3.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . La multialgèbre  $\text{TT}_{\text{tc}}$  de la *topologie temporalisée des régions de taille constante* est le produit cartésien  $\text{RCC8}^m \times \text{PA}$  doté des projections suivantes : pour tout  $b$ ,  $\uparrow_i^j b = \mathcal{B}_{\text{RCC8}}$  (aucune interdépendance) pour  $1 \leq i, j \leq m$ , et  $\uparrow_i^{m+1} b$  et  $\uparrow_{m+1}^i b$  sont définies par la table 1 pour  $1 \leq i \leq m$ .

**Definition 4.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . La multialgèbre  $\text{TT}_{\text{sri,tc}}$  de la *topologie temporalisée des régions de taille constante sans relation intermédiaire* est le produit cartésien  $\text{RCC8}^m \times \text{PA}$  doté des projections  $\uparrow_i^j$  imposant le graphe de voisinage de la figure 2.b pour  $1 \leq i, j \leq m$ , et des projections  $\uparrow_i^{m+1}$  et  $\uparrow_{m+1}^i$  de  $\text{TT}_{\text{tc}}$  pour  $1 \leq i \leq m$ .

Ces deux multialgèbres imposent uniquement la préservation de la taille *relative*, mais pour certains formalismes cela suffit à garantir l'existence d'une solution avec des régions de taille constante. Cette technique d'ajout d'une algèbre dans le produit cartésien est *a priori* applicable à la préservation d'autres attributs, tels que l'orientation, la position ou la vitesse.

### 3.2 Sémantique des séquences temporelles

Nous avons vu que les multialgèbres sont dotées des opérateurs de composition, d'inversion, d'intersection et de projection qui permettent de raisonner à propos de leurs relations. Pour prouver que le raisonnement d'une multialgèbre est correct et/ou complet, nous avons besoin de définir la *sémantique* de ses relations, c'est-à-dire la façon dont elles sont interprétées. Cela nécessite d'explicitier un *domaine* – l'ensemble des entités considérées – et une *fonction d'interprétation* associant à chaque relation tous les couples d'entités qui sont considérés comme des *réalisations* correctes de cette relation.

Dans le contexte des multialgèbres définies précédemment pour traiter les séquences temporelles, nous raisonnons à propos de régions qui se déplacent continûment ; une entité est alors ce que nous appelons une *évolution continue d'une région*, c'est-à-dire une fonction continue indiquant à chaque instant l'état courant de la région. Nous considérons deux domaines : l'ensemble  $\mathfrak{R}^I$  de toutes les évolutions continues durant un intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ , et son sous-ensemble strict  $\mathfrak{R}_{\text{tc}}^I$  contenant toute les évolutions continues d'une région de taille constante. Plus formellement,  $\mathfrak{R}^I$  (resp.  $\mathfrak{R}_{\text{tc}}^I$ ) est l'ensemble des fonctions continues  $f$  de  $I$  vers l'ensemble des régions de  $\mathbb{R}^d$  (resp. vers l'ensemble des régions mesurables de  $\mathbb{R}^d$  satisfaisant  $\exists s \in \mathbb{R}_+^* : \forall t \in I : \mu(f(t)) = s$ , avec  $\mu$  une mesure de taille

de région). Nous pouvons maintenant définir la sémantique de  $\text{TT}_{\text{tc}}$  (nous ne définissons pas celles de  $\text{TT}_{\text{sri}}$  et  $\text{TT}_{\text{sri,tc}}$  pour des raisons d'espace restreint) :

**Definition 5.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $(\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m$  une séquence ordonnée de  $m$  instants distincts. La fonction d'interprétation de  $\text{TT}_{\text{tc}}$  est la fonction  $\varphi_{\text{TT}_{\text{tc}}} : \text{RCC8}^m \times \text{PA} \rightarrow (\mathfrak{R}_{\text{tc}}^{[\tau_1, \tau_m]})^2$  associant à chaque relation  $R$  l'ensemble de tous les couples d'évolutions de régions  $(f, f')$  satisfaisant  $R$ , c'est-à-dire vérifiant les contraintes de  $\text{RCC8}$  à l'instant correspondant ( $\forall i \in \{1, \dots, m\} : f(\tau_i) R_i f'(\tau_i)$ ) ainsi que les contraintes de taille  $(\mu(f(\tau_1)) R_{m+1} \mu(f'(\tau_1)))$ .

Cette sémantique satisfait de très bonnes propriétés : le triplet  $(\text{TT}_{\text{tc}}, \mathfrak{R}_{\text{tc}}^{[\tau_1, \tau_m]}, \varphi_{\text{TT}_{\text{tc}}})$  constitue un *formalisme lâchement combiné* [Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b]. Cela garantit qu'une relation est cohérente si et seulement si elle contient une relation basique cohérente, et que le raisonnement est *sain* : utiliser les opérateurs pour éliminer des relations basiques d'une relation ne change pas son interprétation.

Notons que, tandis que la partie syntaxique (la multialgèbre) impose seulement la préservation des tailles relatives, la sémantique (la fonction d'interprétation) requiert bien la préservation de la taille des entités.

### 3.3 Décision de la cohérence des séquences

Nous avons utilisé les relations des multialgèbres pour représenter des séquences temporelles entre deux entités. À l'instar du cadre classique, des descriptions plus complexes peuvent être établies à l'aide de *réseaux de contraintes qualitatives*, dont les contraintes sont des relations de multialgèbres. L'exemple suivant est un réseau  $N$  (et même un scénario) sur  $\text{RCC8}^3 \times \text{PA}$  :  $N^{xy} = (\text{TPP}, \text{PO}, \text{PO}, <)$ ,  $N^{yz} = (\text{PO}, \text{TPP}, \text{PO}, <)$ , et  $N^{xz} = (\text{PO}, \text{PO}, \overline{\text{TPP}}, >)$ .

Grâce à la section précédente, nous pouvons formellement définir une *solution* d'un réseau comme un assignement à chaque variable d'entité de  $E$  d'une entité du domaine  $U$  considéré tel que chaque contrainte soit satisfaite, c'est-à-dire un ensemble  $\{u_x\}_{x \in E} \subseteq U$  satisfaisant  $\forall x, y \in E : (u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$ . Notons qu'avec les formalismes lâchement combinés, un réseau est cohérent si et seulement s'il contient un scénario cohérent. Pour décider la cohérence d'un réseau, une méthode intuitive consiste à utiliser les opérateurs de la multialgèbre pour retirer des relations basiques irréalisables des contraintes, et ce itérativement. Lorsque les opérateurs ne retirent plus de relations, le réseau résultant est dit *algébriquement clos*.

**Definition 6.** Un réseau  $N$  est dit *algébriquement clos* lorsqu'il est à la fois clos par composition ( $\forall x, y, z \in E : N^{xz} \subseteq N^{xy} \diamond N^{yz}$ ) et clos par projection ( $\forall x, y \in E : N_j^{xy} \subseteq \uparrow_i^j N_i^{xy}$  pour tous  $i, j$  distincts).

Calculer la clôture algébrique d'un réseau peut donner l'ensemble vide comme relation : c'est le cas pour le réseau  $N$  dans l'exemple précédent. L'ensemble vide étant

une contrainte insatisfaisable, et le raisonnement étant sain, cela signifie que le réseau initial est incohérent. Remarquons au passage que dans le cas du réseau  $N$ , sans expliciter les contraintes de taille, on n'aurait pas pu détecter son incohérence.

Un réseau algébriquement clos ne contenant aucune relation vide est qualifié d'*algébriquement cohérent*, au sens où le raisonnement algébrique ne peut prouver son incohérence. En remplaçant  $N^{xz}$  par (PO, PO, TPP, <) dans l'exemple précédent, on obtient un réseau algébriquement cohérent, qui est en fait cohérent. Cependant, en général, on ne peut rien conclure à propos de la cohérence d'un réseau algébriquement cohérent – même si c'est un scénario. C'est une propriété fondamentale d'un formalisme que tous ses scénarios algébriquement clos soient cohérents. En effet, cette propriété (qui dépend de sa fonction d'interprétation) fournit une procédure *complète* pour décider la cohérence – une simple recherche d'un scénario clos, typiquement en utilisant un algorithme de *branch and bound* (séparation et évaluation) qui applique la clôture algébrique. Un formalisme ou un fragment satisfait la propriété plus forte de *traitabilité algébrique* lorsque clore algébriquement un réseau, ce qui peut être effectué en temps polynomial, suffit à décider sa cohérence.

### 3.4 Avantages computationnels des multialgèbres

Les multialgèbres sont bien adaptées pour raisonner sur les séquences temporelles. En effet, contrairement aux autres approches comme celle de Westphal *et al.* [2013] ou de Gerevini et Nebel [2002], il n'y a aucun besoin de dupliquer les variables d'entités à chaque instant de la séquence, afin de pouvoir ajouter des contraintes d'interdépendances entre une entité et elle-même à un instant différent (par exemple pour préserver la taille). En particulier, la clôture algébrique peut être imposée en temps  $\Theta(m \cdot n^3 + m^2 \cdot n^2)$  avec les multialgèbres, alors qu'elle nécessite un temps  $\Theta(m^3 \cdot n^3)$  si les variables sont dupliquées. Ne pas dupliquer les variables a un second avantage : lors de la procédure de séparation et évaluation pour chercher un scénario clos d'un réseau (afin de décider sa cohérence dans les cas intraitables), l'arbre de recherche a une profondeur significativement plus petite. Cependant, contrairement à celle de Westphal *et al.* [2013], l'approche des multialgèbres ne peut empêcher des changements qualitatifs sur des couples distincts d'entités d'avoir lieu *en parallèle* entre les instants.

## 4 Topologie temporalisée avec préservation de la taille

Nous nous penchons à présent sur  $TT_{tc}$ , c'est-à-dire sur le cas de la *préservation de la taille* pour les séquences temporelles d'informations *topologiques* ; les solutions doivent

être continues, mais il *peut* y avoir des relations intermédiaires. Nous montrons que le raisonnement avec  $TT_{tc}$  est complet, et nous identifions ses sous-classes traitables maximales contenant toutes les relations basiques.

### 4.1 Complétude du raisonnement pour $TT_{tc}$

Cette section montre un résultat fondamental : la clôture algébrique suffit à décider la cohérence de tous les scénarios sur  $TT_{tc}$ . Remarquons que la preuve est très spécifique à RCC8 – il n'y a aucune garantie que pour une algèbre  $\mathcal{A}$  quelconque, on ait un résultat similaire pour les scénarios de la multialgèbre temporalisée  $\mathcal{A}^m \times PA$ . En particulier, une condition nécessaire est la cohérence de tous les scénarios algébriquement clos pour la combinaison  $\mathcal{A} \times PA$  (c'est-à-dire le cas  $m = 1$ ) ; ce n'est notamment pas le cas si  $\mathcal{A}$  est l'*algèbre des intervalles* [Ligozat, 2013, ch. 8].

**Proposition 7.** *Les scénarios algébriquement clos sur  $TT_{tc}$  sont cohérents (pour des régions de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ).*

*Démonstration.* Soit  $N$  un scénario algébriquement clos sur  $TT_{tc}$ , avec  $n$  variables d'entité  $x_1, \dots, x_n$  et  $m$  instants  $\tau_1, \dots, \tau_m$ . Nous montrons qu'il est possible d'assigner à chaque  $x_i$  un élément  $f_i$  de  $\mathfrak{R}_{tc}^{[\tau_1, \tau_m]}$  (une évolution continue d'une région d'une taille constante) tel que chaque contrainte soit satisfaite. Puisque nous avons seulement besoin de prouver l'existence d'une solution, dans le but de rendre cette preuve aussi simple et claire que possible, nous choisissons une forme spécifique pour les régions et leur mouvement. En particulier, les relations intermédiaires étant autorisées, nous pouvons traiter chaque instant indépendamment. Plus précisément, il nous suffit de montrer que pour tout scénario sur RCC8 algébriquement clos, en partant d'une configuration fixée avec des régions disjointes deux à deux, il est possible de déplacer continûment ces régions une par une, sans modifier leur taille, pour obtenir une configuration satisfaisant le scénario. Cette évolution continue pouvant être inversée, la configuration initiale peut être utilisée comme une configuration *intermédiaire* entre toute paire d'instant successifs, ce qui assure que l'évolution est continue tout au long de la séquence.

**Taille des régions.** Puisque  $N$  est clos par composition et que les scénarios clos sur PA sont cohérents, nous pouvons associer à chaque entité un *rang* entier, noté  $\text{rang}(x_i) \in \{1, \dots, n\}$ , tel que les rangs satisfont les contraintes de taille. Sans perte de généralité, nous supposons que les  $x_i$  sont ordonnés de sorte que leur rang soit croissant, et que les différents rangs sont des entiers successifs ( $\forall i \in \{2, \dots, n\}$ :  $\text{rang}(x_{i-1}) \leq \text{rang}(x_i) \leq \text{rang}(x_{i-1}) + 1$ ). Les entités de rang 1 sont les plus petites régions, les entités de rang 2 sont les secondes plus petites, etc. Évidemment, le rang d'une entité ne dépend pas de l'instant considéré, la taille d'une entité ne devant pas changer entre les instants.

**Définition des régions.** Considérons un scénario clos sur RCC8, et notons  $R^{ij}$  la relation basique de RCC8 qui

doit être satisfaite entre  $x_i$  et  $x_j$  à cet instant. Nous construisons chaque région comme une union disjointe de *sous-régions*, à savoir des *boules fermées* de  $\mathbb{R}^d$  : cela nous permet de faire interagir une région avec chacune des autres régions le plus indépendamment possible. Pour chaque  $i$ , les sous-régions de  $x_i$  ont toutes le même rayon, égal à  $3^{\text{rang}(x_i)}$  pour qu'il soit plus de deux fois plus grand que celui des boules de rang inférieur (la raison sera donnée plus tard). Les boules restent disjointes à tout moment, même lorsqu'elles bougent (ce n'est jamais un problème dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ ), afin que la taille de  $x_i$  reste constante. Chaque région  $x_i$  comporte  $n$  sous-régions *primaires*, notées  $P_i^j$  ( $1 \leq j \leq n$ ), qui seront utilisées pour imposer la satisfaction des relations EC et PO avec chaque autre région  $x_j$ . Puisque  $x_i$  peut avoir à inclure *toutes* les régions de plus petit rang (à cause des relations TPP et NTPP), qui, dans le pire des cas, peuvent être toutes déconnectées (DC), nous ajoutons à  $x_i$  autant de sous-régions *secondaires* que de sous-régions de rang strictement inférieur. Ainsi, pour chaque  $k$  tel que  $\text{rang}(x_k) < \text{rang}(x_i)$ , pour chaque sous-région  $P$  de  $x_k$ , nous ajoutons à  $x_i$  une sous-région  $P_i(P)$  destinée à couvrir  $P$  si nécessaire. Remarquons que les entités de même rang ont exactement le même nombre de sous-régions, et donc la même taille (puisque les sous-régions d'une entité restent toujours disjointes).

**Configuration initiale.** Initialement, toutes les boules sont disjointes et leurs centres sont alignés sur une droite, choisie arbitrairement, appelée *axe* (nous choisissons également arbitrairement des directions *droite* et *gauche* sur cet axe). Hormis durant les déplacements, le centre de chaque boule reste toujours sur l'axe. Nous appelons *zone d'interaction*  $Z(P)$  de la boule  $P$ , la zone centrée autour de la position *initiale* de  $P$  (les zones d'interaction ne bougent jamais). Nous supposons que les zones d'interaction sont disjointes, et que chacune est suffisamment grande pour contenir une boule de rayon  $3^{n+1}$  (plus grande que n'importe quelle sous-région). Initialement, chaque  $Z(P)$  contient uniquement la sous-région  $P$ . Nous nous assurerons qu'il y a en permanence *au plus une* sous-région de chaque entité dans chaque zone d'interaction : c'est une façon simple de garantir que les sous-régions d'une entité restent disjointes (et donc que la taille est préservée). Nous notons  $\mathcal{Z}_i = \{Z(P_i) \mid P_i \text{ subregion of } x_i\}$  l'ensemble des zones d'interaction de l'entité  $x_i$ .

Si  $R^{ij} = \text{EQ}$  pour certains  $i, j$ , nous pouvons bouger chaque sous-région de  $x_j$  afin qu'elle devienne égale à une sous-région de  $x_i$ . Puisque le réseau est clos, cela est toujours possible ( $x_i$  et  $x_j$  ont le même rang et  $\forall k: R^{ik} = R^{jk}$ ). Nous pouvons ensuite *identifier*  $x_i$  et  $x_j$ , c'est-à-dire verrouiller leurs sous-régions deux à deux afin qu'elles bougent toujours simultanément et que  $x_i$  et  $x_j$  restent ainsi égales à tout moment. Ainsi, dans la suite, nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $i \neq j \iff R^{ij} \neq \text{EQ}$ .

**Étape 1 : contact et chevauchement.** Pour chaque

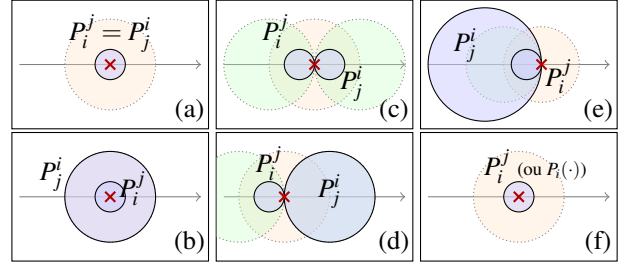


FIGURE 3 – Les boules bleues montrent toutes les configurations possibles à la fin de l'étape 1 dans une zone d'interaction  $Z(P_i^j)$  non vide : (a)  $R^{ij} = \text{PO}$  et  $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$ ; (b)  $R^{ij} = \text{PO}$  et  $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$ ; (c)  $R^{ij} = \text{EC}$  et  $\text{rang}(x_i) = \text{rang}(x_j)$ ; (d)  $R^{ij} = \text{EC}$  et  $\text{rang}(x_i) < \text{rang}(x_j)$ ; (e)  $R^{ij} = \text{TPP}$ ; (f)  $R^{ij} \in \{\text{DC}, \text{NTPP}\}$  (c'est également la configuration dans toutes les zones d'interaction de boules secondaires et des sous-régions  $P_i^j$ ). Les croix rouges indiquent le *point d'interaction*. Les boules pâles en pointillés montrent les positions possibles durant l'étape 2 des boules secondaires les plus petites (en vert, les cas spéciaux).

couple  $i, j$  tel que  $i < j$ , on procède comme suit : (i) si  $R^{ij} = \text{PO}$ , on bouge  $P_j^i$  pour faire coïncider son centre avec celui de  $P_i^j$  (voir la figure 3.a,b) ; (ii) si  $R^{ij} = \text{EC}$ , on bouge  $P_j^i$  pour faire coïncider son point le plus à gauche avec le point le plus à droite de  $P_i^j$  (voir la figure 3.c,d) ; (iii) si  $R^{ij} = \text{TPP}$ , on bouge  $P_j^i$  pour faire coïncider son point le plus à droite avec le point le plus à droite de  $P_i^j$  (voir la figure 3.e). Il est clair, à cette étape, qu'il y a au plus deux sous-régions dans chaque zone (et qu'elles appartiennent à des régions distinctes, ainsi la taille de chaque région n'a pas changé), qu'aucune sous-région  $P_i^j$  telle que  $i < j$  n'a bougé, et que toutes les relations PO et EC sont satisfaites.

**Étape 2 : inclusions.** Pour que le scénario soit satisfait, il ne reste plus qu'à satisfaire les relations TPP et NTPP entre les régions. Remarquons que nous avons garanti à l'étape 1 une connexion intérieure pour chaque relation TPP, il ne nous reste ainsi qu'à imposer les inclusions. C'est la partie la plus difficile : nous devons couvrir toutes les sous-régions des régions incluses sans que cela n'affecte les autres entités, et nous devons également prendre garde à ne pas annuler les déplacements précédents. Pour ce faire, (i) nous traitons les entités dans l'ordre croissant de leur tailles, ce qui assure que lors du traitement de  $x_i$ , plus aucune sous-région de  $x_k$  avec  $k \leq i$  ne peut encore bouger ; et (ii) pour chaque entité, nous n'itérons pas sur ses relations mais sur ses *zones d'interaction*, en gérant toutes les boules devant se trouver là (puisque on ne reviendra jamais sur une zone déjà traitée). Notons que les sous-régions de  $x_i$  qui ont bougé vers une autre zone ont forcément déjà été traitées, les sous-régions pouvant uniquement bouger vers une zone d'une entité de rang strictement inférieur.

Concrètement, la procédure est comme suit. Pour chaque  $i$  de 1 à  $n$ , on considère chaque zone d'interaction  $Z(P_i) \in \mathcal{Z}_i$ . Si elle est vide,  $P_i$  a bougé vers une autre zone : on ne fait rien. Sinon, il ne peut y avoir que six configurations, montrées dans la figure 3. Pour chaque  $k$  de  $i+1$  à  $n$ , on

regarde s'il faut ajouter une sous-région de  $x_k$  dans cette zone. Ce n'est jamais nécessaire s'il y en a déjà une, mais dans le cas contraire il y a deux cas où il faut en ajouter une : (i)  $R^{ik} \in \{TPP, NTPP\}$ , donc  $P_i$  doit être couverte par une sous-région de  $x_k$ ; (ii) la zone contient une boule d'une autre entité  $x_j$ , qui a bougé ici durant l'étape 1 ou un peu plus tôt dans cette boucle, et  $R^{jk} \in \{TPP, NTPP\}$  (ce cas peut concerner plusieurs boules, chacune d'une entité distincte). S'il y a au moins une boule à couvrir et aucune sous-région de  $x_k$  n'est déjà présente, alors on déplace la sous-région  $P_k(P_i)$  de sa position initiale (par construction, elle n'a jamais bougé) vers  $Z(P_i)$ , afin qu'elle couvre toutes les boules qui doivent être couvertes et ne chevauche aucune boule qui ne doit pas être chevauchée.

Pour ce faire, hormis dans deux cas spéciaux, il suffit de simplement faire coïncider le centre de  $P_k(P_i)$  avec le point d'interaction de  $Z(P_i)$  (voir la figure 3), qui dépend uniquement de sa configuration à la fin de l'étape 1. Le premier cas spécial a lieu lorsque la zone a servi à imposer EC (figure 3.c,d) et qu'il faut couvrir la boule de gauche (resp. de droite) sans chevaucher la boule de droite (resp. de gauche). Dans ce cas, on rend  $P_k(P_i)$  tangent au point d'interaction, en positionnant son centre du côté gauche (resp. droit) de l'axe (voir la boule verte en pointillé dans la figure 3.c,d). Le deuxième cas spécial a lieu lorsque la zone a été utilisée pour imposer TPP (figure 3.e) et que nous devons couvrir la boule  $P_i^j$  en étant couvert par la boule  $P_j^i$  (lorsque nous avons  $R^{jk} = \overline{TPP}$ ). Dans ce cas, nous rendons  $P_k(P_i)$  tangent au point d'interaction, en positionnant son centre du côté gauche de l'axe (la boule verte en pointillé dans la figure 3.e).

On peut prouver, avec la table de composition de RCC8, qu'aucune inclusion ni aucun chevauchement résultant de ces manipulations ne contredit les contraintes du scénario (en particulier, si  $P_k(P_i)$  est plus grande que toutes les boules présentes, alors elle les couvre toutes).  $\square$

Par conséquent, chercher un scénario algébriquement clos suffit à décider la cohérence de tout réseau sur  $TT_{tc}$  : le raisonnement dans le cadre de  $TT_{tc}$  est donc complet pour la décision de la cohérence.

#### 4.2 Sous-classes algébriquement traitables de $TT_{tc}$

La proposition 7 implique que la décision de la cohérence pour  $TT_{tc}$  est dans NP (exhiber un scénario clos prouve la cohérence d'un réseau). Cependant, puisque tout réseau sur RCC8 est équivalent à un réseau sur  $TT_{tc}$  de taille polynomiale, décider la cohérence dans le cadre de  $TT_{tc}$  est en fait NP-complet. En conséquence, nous nous penchons dans cette section sur l'identification de fragments traitables, en particulier de sous-ensembles de relations de  $TT_{tc}$  qui sont clos par composition, intersection et inversion – ce que l'on appelle des *sous-classes* [voir Ligozat, 2013]. Nos résultats découlent de l'application des

théorèmes de Cohen-Solal *et al.* [2017a,b], qui fournissent des conditions suffisantes à ce qu'une sous-classe d'une multialgèbre soit *algébriquement traitable*. Les contraintes d'espace nous empêchent de détailler ces conditions, mais les preuves qui suivent contiennent tous les arguments requis pour les vérifier en utilisant l'article d'origine comme référence.

Avant d'identifier les sous-classes traitables maximales de  $TT_{tc}$ , nous prouvons la traitabilité d'une sous-classe intermédiaire, à savoir  $RCC8_{\max}^m \times PA_{\max}$ , avec  $RCC8_{\max}$  la sous-algèbre (non convexe) maximale pour la distributivité de RCC8 [Long et Li, 2015] et  $PA_{\max} = \{<, =, >, \neq, \mathcal{B}_{PA}\}$ . En fait, par la preuve du résultat suivant, cette sous-classe vérifie une propriété intéressante : pour décider la cohérence, il est suffisant d'appliquer une clôture par projection, suivie d'une clôture par composition (cette sous-classe est *simple* [Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b]). Ce n'est pas le cas en général ; à cause des interdépendances des relations d'un même instant et d'instant différents, pour clore algébriquement un réseau, il peut être nécessaire d'alterner clôture par projection puis clôture par composition jusqu'à atteindre un point fixe.

**Proposition 8.** *La sous-classe  $RCC8_{\max}^m \times PA_{\max}$  de  $TT_{tc}$  est algébriquement traitable.*

*Démonstration.* Nous affaiblissons toutes les projections de PA ( $\mathcal{A}_{m+1}$ ) vers RCC8 ( $\mathcal{A}_i$  avec  $i \leq m$ ) : nous considérons que  $\uparrow_{PA}^{RCC8} b = \mathcal{B}_{RCC8}$  pour tout  $b \in \mathcal{B}_{PA}$ . Nous allons prouver que la sous-classe avec des projections affaiblies est algébriquement traitable, ce qui implique directement que la sous-classe avec les projections d'origine l'est également.

Nous appliquons le théorème de découpage de Cohen-Solal *et al.* [2017a, Th. 24] sur cette sous-classe avec les projections affaiblies, en utilisant la fonction identité pour chaque affinement. **(I)** Les scénarios algébriquement clos pour les projections affaiblies sont cohérents, par la proposition 7, puisqu'ils sont clos pour les projections d'origine. **(II)** C1 : les réseaux sur  $RCC8_{\max}$  et  $PA_{\max}$  qui sont clos par composition sont *minimaux* [Long et Li, 2015]. **(III)** C2 : la sous-classe est *simple* car (i)  $RCC8_{\max} \times PA_{\max}$  ( $m = 1$ ) avec les projections affaiblies est simple [Cohen-Solal *et al.*, 2017a,b], (ii) entre deux relations  $R_i$  et  $R_j$  sur RCC8, il n'y a aucune interdépendance directe ( $\uparrow_{RCC8}^{RCC8} b = \mathcal{B}_{RCC8}$  pour tout  $b$ ), et (iii) être clos par projection est une propriété locale. **(IV)** C3 : les relations  $\uparrow$ -cohérentes sont cohérentes. En effet, c'est vrai pour les relations basiques (proposition 7) ; pour les relations non basiques, on peut choisir une relation basique pour PA puis prendre une relation compatible de RCC8 pour chaque instant indépendamment, puisque, une fois encore,  $R_i$  et  $R_j$  sont indépendants lorsque  $i, j \leq m$ . Remarquons que l'on peut prendre une relation compatible de RCC8 car nous avons  $\forall b \in R_{m+1} : \exists b' \in R_i : b \in \uparrow_{RCC8}^{PA} b'$  pour  $1 \leq i \leq m$ ,



puisque  $R_{m+1} \subseteq \hat{\Gamma}_{RCC8}^{PA} R_i$ , et parce que  $(b', b)$  est cohérent. (V) Pour finir, par des arguments similaires à ceux de la condition C2, la sous-classe est  $\hat{\Gamma}$ -close.  $\square$

Nous identifions à présent les trois sous-classes de  $TT_{tc}$  qui sont maximales pour la traitabilité et contiennent toutes les relations basiques. Elles sont construites sur les sous-classes classiques de RCC8 :  $\hat{H}_8$ ,  $C_8$  et  $Q_8$  [Renz, 1999].

**Theorem 9.** *Les sous-classes traitables maximales de  $TT_{tc}$  qui contiennent  $\mathcal{B}_{RCC8}$  sont  $\hat{H}_8^m \times PA$ ,  $C_8^m \times PA$  et  $Q_8^m \times PA$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S} \in \{\hat{H}_8, C_8, Q_8\}$ . Nous utilisons le théorème d'affinement de Cohen-Solal *et al.* [2017a, Th. 26] pour montrer que  $\mathcal{S} \times PA$  est algébriquement traitable, en l'affinant vers  $RCC8_{max}^m \times PA_{max}$  par  $H = (h_{\mathcal{S}}, \dots, h_{\mathcal{S}}, h_{max})$ , avec  $h_{\mathcal{S}}$  l'affinement usuel de  $\mathcal{S}$  vers les relations basiques [Gerevini et Renz, 2002, Fig. 2] et  $h_{max}$  l'affinement de  $PA$  vers les relations basiques de *dimension maximale* [voir Cohen-Solal *et al.*, 2017a]. (I) C1 :  $\mathcal{S}^m \times PA$  est algébriquement stable par  $H$ , car (i) c'est le cas pour  $m = 1$  [Cohen-Solal *et al.*, 2017a], (ii) il n'y a aucune interdépendance directe entre les instants de la séquence, et (iii) être clos par projection et être clos par composition sont des propriétés locales. (II) C2 :  $RCC8_{max}^m \times PA_{max}$  est algébriquement traitable (proposition 8). (III)  $\mathcal{S}^m \times PA$  est  $\hat{\Gamma}$ -close, en utilisant les mêmes arguments que pour C1. Par le théorème d'affinement,  $\mathcal{S}^m \times PA$  est donc algébriquement traitable.

Maintenant, puisque  $\hat{H}_8$ ,  $C_8$  et  $Q_8$  sont les trois seules sous-classes de RCC8 qui contiennent toutes les relations basiques et qui sont maximales pour la traitabilité (en supposant  $P \neq NP$ ) [Renz, 1999],  $\hat{H}_8^m \times PA$ ,  $C_8^m \times PA$  et  $Q_8^m \times PA$  sont ainsi maximales également.  $\square$

## 5 Conclusion et perspectives

Nous proposons une approche générale, basée sur les multialgèbres, pour raisonner à propos des séquences temporelles d'informations qualitatives, qui est plus performante que les approches de l'état de l'art. Nous introduisons en particulier le nouveau formalisme de la *topologie temporalisée des régions de taille constante*, dont le raisonnement est complet pour la décision de la cohérence. De plus, nous avons identifié ses sous-classes traitables maximales contenant toutes les relations basiques.

Cet article est limité aux séquences temporelles, mais les idées présentées peuvent notamment être appliquées à l'approche temporellement plus expressive de Sioutis *et al.* [2014], lui fournissant une procédure de raisonnement complète pour les relations topologiques entre régions de taille constante.

Nous planifions de continuer l'étude de la topologie temporalisée en nous intéressant à la continuité sans relation intermédiaire, avec et sans préservation de la taille ; nous

conjecturons que le raisonnement pour décider la cohérence est également complet dans ces cas. Nous avons aussi pour objectif de montrer que les multialgèbres permettent d'imposer des *diagrammes de dominance* [Galton, 2000], qui sont des structures plus générales que les graphes de voisinage, et de traiter la contrainte de continuité sans *état* intermédiaire [Westphal *et al.*, 2013].

## Références

- BENNETT, B., COHN, A. G., WOLTER, F. et ZAKHARYASCHEV, M. (2002). Multi-dimensional modal logic as a framework for spatio-temporal reasoning. *Applied Intelligence*, 17(3):239–251.
- BOGAERT, P., Van de WEGHE, N., COHN, A. G., WITLOX, F. et DE MAEYER, P. (2006). The qualitative trajectory calculus on networks. *In Proc. of the International Conference on Spatial Cognition*, pages 20–38. Springer.
- CHEN, J., COHN, A. G., LIU, D., WANG, S., OUYANG, J. et YU, Q. (2015). A survey of qualitative spatial representations. *The Knowledge Engineering Review*, 30(01):106–136.
- COHEN-SOLAL, Q., BOUZID, M. et NIVEAU, A. (2015). An algebra of granular temporal relations for qualitative reasoning. *In Proc. of IJCAI*, pages 2869–2875.
- COHEN-SOLAL, Q., BOUZID, M. et NIVEAU, A. (2017a). Checking the consistency of combined qualitative constraint networks. *In Proc. of AAAI*, pages 1084–1090.
- COHEN-SOLAL, Q., BOUZID, M. et NIVEAU, A. (2017b). Décision de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives combinés. *Revue d'Intelligence Artificielle*, 31(1-2):41–70.
- COHEN-SOLAL, Q., BOUZID, M. et NIVEAU, A. (2017c). Temporal sequences of qualitative information : Reasoning about the topology of constant-size moving regions. *In Proc. of IJCAI*.
- COHN, A. G., BENNETT, B., GOODAY, J. et GOTTS, N. M. (1997). Qualitative spatial representation and reasoning with the region connection calculus. *GeoInformatica*, 1(3):275–316.
- COHN, A. G., GOTTS, N. M., CUI, Z., RANDELL, D. A., BENNETT, B. et GOODAY, J. (1998). Exploiting temporal continuity in qualitative spatial calculi. *Spatial and Temporal Reasoning in Geographic Information Systems*, pages 5–24.
- COHN, A. G. et HAZARIKA, S. M. (2001). Qualitative spatial representation and reasoning : An overview. *Fundamenta informaticae*, 46(1-2):1–29.

- CUI, Z., COHN, A. G. et RANDELL, D. A. (1992). Qualitative simulation based on a logic of space and time. *In Proc. of AAAI*, pages 679–684.
- DYLLA, F. et MORATZ, R. (2004). Exploiting qualitative spatial neighborhoods in the situation calculus. *In Proc. of the International Conference on Spatial Cognition*, pages 304–322. Springer.
- DYLLA, F. et WALLGRÜN, J. O. (2007). Qualitative spatial reasoning with conceptual neighborhoods for agent control. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 48(1):55–78.
- EGENHOFER, M. J. (2010). The family of conceptual neighborhood graphs for region-region relations. *In Proc. of the International Conference on Geographic Information Science*, pages 42–55. Springer.
- FREKSA, C. (1992). Temporal reasoning based on semi-intervals. *Artif. Intell.*, 54(1-2):199–227.
- GALTON, A. (1993). Towards an integrated logic of space, time, and motion. *In Proc. of IJCAI*, pages 1550–1555.
- GALTON, A. (2000). *Qualitative spatial change*. Oxford University Press.
- GEREVINI, A. et NEBEL, B. (2002). Qualitative spatio-temporal reasoning with RCC-8 and Allen’s interval calculus : Computational complexity. *In Proc. of ECAI*, pages 312–316.
- GEREVINI, A. et RENZ, J. (2002). Combining topological and size information for spatial reasoning. *Artif. Intell.*, 137(1):1–42.
- HAZARIKA, S. M. et COHN, A. G. (2001). Qualitative spatio-temporal continuity. *In Proc. of the International Conference on Spatial Information Theory*, pages 92–107. Springer.
- LIGOZAT, G. (2013). *Qualitative spatial and temporal reasoning*. John Wiley & Sons.
- LONG, Z. et LI, S. (2015). On distributive subalgebras of qualitative spatial and temporal calculi. *In Spatial Information Theory*, pages 354–374. Springer.
- MULLER, P. (2002). Topological spatio-temporal reasoning and representation. *Computational Intelligence*, 18(3):420–450.
- RAGNI, M. et WÖLFL, S. (2005). Temporalizing spatial calculi : On generalized neighborhood graphs. *In Proc. of KI*, pages 64–78. Springer.
- RAGNI, M. et WÖLFL, S. (2006). Temporalizing cardinal directions : From constraint satisfaction to planning. *In Proc. of KR*, pages 472–480.
- RENZ, J. (1999). Maximal tractable fragments of the region connection calculus : A complete analysis. *In Proc. of IJCAI*, pages 448–455.
- SANTOS, M. Y. et MOREIRA, A. (2009). Conceptual neighborhood graphs for topological spatial relations. *In Proc. of the World Congress on Engineering*, volume 1, pages 12–18.
- SIOUTIS, M., CONDOTTA, J.-F., SALHI, Y. et MAZURE, B. (2014). A qualitative spatio-temporal framework based on point algebra. *In Proc. of AIMSA*, pages 117–128. Springer.
- SIOUTIS, M., CONDOTTA, J.-F., SALHI, Y., MAZURE, B. et RANDELL, D. A. (2015). Ordering spatio-temporal sequences to meet transition constraints : Complexity and framework. *In Proc. of AI Applications and Innovations*, pages 130–150. Springer.
- Van de WEGHE, N. et DE MAEYER, P. (2005). Conceptual neighbourhood diagrams for representing moving objects. *In Proc. of the International Conference on Conceptual Modeling*, pages 228–238. Springer.
- VILAIN, M., KAUTZ, H. et van BEEK, P. (1989). Constraint propagation algorithms for temporal reasoning : A revised report. *In WELD, D. S. et de KLEER, J., éditeurs : Readings in Qualitative Reasoning About Physical Systems*, pages 373–381. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- WESTPHAL, M., DORNHEGE, C., WÖLFL, S., GISSLER, M. et NEBEL, B. (2011). Guiding the generation of manipulation plans by qualitative spatial reasoning. *Spatial Cognition & Computation*, 11(1):75–102.
- WESTPHAL, M., HUÉ, J., WÖLFL, S. et NEBEL, B. (2013). Transition constraints : A study on the computational complexity of qualitative change. *In Proc. of IJCAI*, pages 1169–1175.
- WÖLFL, S. et WESTPHAL, M. (2009). On combinations of binary qualitative constraint calculi. *In Proc. of IJCAI*, pages 967–973.
- WOLTER, D. et KREUTZMANN, A. (2015). Analogical representation of rcc-8 for neighborhood-based qualitative spatial reasoning. *In Joint German/Austrian Conference on Artificial Intelligence (Künstliche Intelligenz)*, pages 194–207. Springer.
- WU, J., CLARAMUNT, C. et DENG, M. (2014). Towards a qualitative representation of movement. *In Proc. of the International Conference on Conceptual Modeling*, pages 191–200. Springer.
- ZIMMERMANN, K. et FREKSA, C. (1993). Enhancing spatial reasoning by the concept of motion. *Prospects for Artificial Intelligence*, pages 140–147.