Actes IAF 2015

Une algèbre des relations temporelles granulaires pour le raisonnement qualitatif *

Quentin Cohen-Solal   Maroua Bouzid   Alexandre Niveau
GREYC-CNRS
U. Caen, France
{quentin.cohen-solal, maroua.bouzid-mouaddib, alexandre.niveau}@unicaen.fr

Résumé

Dans cet article, nous proposons un formalisme qualitatif pour représenter et raisonner sur le temps à différentes échelles, appelées granularités. En particulier, nous étendons certains des résultats d'Euzenat [1995] à la prise en compte des relations entre les points et les intervalles. Notre formalisme est plus expressif que la plupart des algèbres de relations temporelles proposées dans la littérature. En effet, certaines de nos relations sont plus restrictives que celles de l'algèbre d'Allen [1983], tandis que d'autres le sont moins. En particulier, ce formalisme permet la modélisation de relations imprécises, graduelles et intuitives, telles que « juste avant » ou « touche presque ». En outre, nous exposons plusieurs résultats concernant la conversion d'une relation d'une granularité à une autre. Enfin, nous présentons un algorithme qui calcule la clôture algébrique d'un réseau de contraintes temporelles dans le cadre de notre formalisme, pouvant être utilisé pour en vérifier la cohérence.

Abstract

In this paper, we propose a qualitative formalism for representing and reasoning about time at different scales. It extends some of the results of Euzenat [1995] and overcomes their major limitations, allowing one to reason about relations between points and intervals. Our approach is more expressive than most algebras of temporal relations : for instance, some relations are more relaxed than those in Allen's [1983] algebra, while others are stricter. In particular, it enables the modeling of imprecise, gradual, or intuitive relations, such as "just before" or "almost meet". In addition, we give several results about how a relation changes when considered at different granularities. Finally, we provide an algorithm to compute the algebraic closure of a temporal constraint network in our formalism, which can be used to check its consistency.

1 Introduction

Les agents autonomes doivent souvent être capables de raisonner sur le temps ; l'étude des formalismes temporels qualitatifs est un moyen de parvenir à ce but. Les plus populaires de ces formalismes sont les algèbres des relations temporelles, dans lesquelles les localisations temporelles des événements (appelés *primitives* ou *entités*) sont définies relativement les unes par rapport aux autres, sans aucune donnée quantitative. L'*algèbre des points* de Vilain *et al.* [1986] (plus tard étudiée par Ladkin et Maddux [1994] et Hirsch [1996]) définit trois relations élémentaires entre des points. L'*algèbre des intervalles* d'Allen [1983] caractérise 13 relations élémentaires entre deux intervalles. L'*algèbre des points et des intervalles* de Vilain [1982], développée par Meiri [1996] et Krokhin et Jonsson [2002], étend simultanément ces deux dernières algèbres en ajoutant des relations entre un point et un intervalle, pour un total de 26 relations. Dans chacune de ces trois algèbres, des *opérateurs* permettent de déduire de nouvelles relations entre les entités, et donc de raisonner sur des événements.

Cependant, ces formalismes ne considèrent ni des données ayant des précisions différentes, ni le concept de représentation et raisonnement multi-échelle. Ce concept permet de représenter les événements à différents niveaux de détail, appelés *granularités*, tels que les jours, les mois ou les semaines. Grâce aux granularités, il est possible d'organiser les connaissances hiérarchiquement et de raisonner à chaque échelle. Par exemple, dans le cadre des relations temporelles, on peut dire qu'un intervalle A rencontre un autre inter-

*Ceci est la version française de l'article « An Algebra of Granular Temporal Relations for Qualitative Reasoning », à paraître dans les actes de la conférence IJCAI 2015.

valle B à une granularité grossière (*i.e.* d'un point de vue général), mais que A est avant B à une granularité fine (*i.e.* d'un point de vue plus précis). Les algèbres usuelles ne permettent pas de traiter de telles connaissances sans aboutir à des incohérences. Afin de surmonter ce problème, Euzenat a proposé une extension granulaire de l'algèbre des points ainsi qu'une extension de l'algèbre des intervalles [Euzenat, 1995]. Chacune d'entre elles fournit une table décrivant comment les relations changent quand elles sont considérées à une granularité plus fine (conversion descendante) ou à une granularité plus grossière (conversion ascendante).

Toutefois, la table de conversion des relations entre intervalles n'est pas toujours applicable : si un intervalle devient un point lorsqu'il est considéré à une granularité plus grossière, la conversion ascendante d'une relation entre cet intervalle et un autre est impossible, puisque seules les relations entre intervalles sont autorisées. Par exemple, considérons deux intervalles $A = [01{:}30, 03{:}10]$ et $B = [03{:}15, 05{:}07]$ ayant lieu le même jour. A la granularité des minutes, A est avant B, tandis qu'à la granularité des heures, A rencontre B. A la granularité des jours, A et B sont indiscernables ; la relation entre A et B est donc la relation d'« égalité des points », qui n'existe pas dans l'algèbre d'Allen, et n'est donc pas présente dans la table de conversion d'Euzenat. En conséquence, les conditions pour que la conversion ascendante soit applicable dépendent, en particulier, de la durée des intervalles, qui n'est pas toujours connue. L'algèbre d'Allen et donc son extension granulaire ne décrivent pas toutes les relations possibles lorsqu'il y a plus d'une granularité : de ce fait, raisonner est impossible lorsque certaines granularités sont très grossières.

Pour surmonter ces limitations, nous proposons dans cet article une extension granulaire de l'algèbre des points et des intervalles, dans le but de représenter et de raisonner sur des connaissances temporelles imprécises, provenant par exemple de données exprimées en langage naturel ou de sources n'ayant pas les mêmes échelles temporelles. De ce point de vue, notre formalisme peut être considéré comme une alternative à l'algèbre des intervalles flous de Schockaert *et al.* [2006], dans laquelle il est aussi possible de modéliser des relations imprécises. En particulier, nous nous intéressons aux granularités qualitatives, c'est-à-dire aux granularités pour lesquelles aucune information quantitative (telle que la durée des granules) n'est spécifiée : nous n'utilisons que leurs échelles relatives. Ces granularités qualitatives permettent plus de flexibilité dans le processus de modélisation et sont, par exemple, nécessaires pour analyser une information temporelle exprimée dans le langage naturel, où les granularités ne sont pas exactement connues et ne peuvent donc pas être quantitativement modélisées.

La section suivante rappelle les concepts principaux des granularités temporelles que nous utilisons dans cet article. Ensuite, dans la troisième section, nous introduisons les relations granulaires entre points et intervalles. La quatrième section présente notre algèbre des relations temporelles granulaires et ses opérateurs, incluant les conversions granulaires. Dans la section 5, nous proposons un algorithme polynomial pour calculer la clôture algébrique d'un réseau de contraintes temporelles granulaires, qui peut être utilisé pour vérifier sa cohérence dans le cadre des granularités qualitatives. Dans la sixième section, nous discutons des travaux connexes. Enfin, la conclusion et nos perspectives de travaux futurs sont présentées dans la Section 7.

2 Granularités temporelles

2.1 Définitions

Plusieurs travaux formalisant les granularités temporelles ont été développés. Notre formalisme s'appuie sur le cadre de Bettini *et al.* [2000], tel que présenté par Euzenat et Montanari [2005]. Cette approche utilise la théorie des ensembles pour définir les granularités. Dans ce qui suit, nous rappelons les concepts de base dont nous avons besoin pour définir notre formalisme.

Le temps est modélisé par un *domaine temporel* T, qui est un ensemble totalement ordonné, discret ou dense. Ses éléments sont appelés *points temporels*.

Définition 1. Une granularité g est une fonction d'un ensemble ordonné discret I_g vers l'ensemble des parties du domaine temporel T telle que :

$$\forall i, j, k \in I_g, \quad i < k < j \ \wedge \ g_i \neq \emptyset \ \wedge \ g_j \neq \emptyset \implies g_k \neq \emptyset$$
$$\forall i, j \in I_g, \quad i < j \implies \forall x \in g_i, \forall y \in g_j, \ x < y$$

Ainsi, chaque granularité est une séquence de sous-ensembles du domaine temporel qui préserve l'ordre naturel des points temporels. Les ensembles g_i sont appelés des *granules* de la granularité g. Par abus de notation, on considère que T est lui même une granularité, représenté par la fonction $T\colon i \in T \mapsto \{i\}$, c'est-à-dire que $I_T = T$ (même s'il n'est pas discret) et $T_i = \{i\}$.

Bettini *et al.* ont défini plusieurs relations entre granularités ; nous nous intéressons à deux d'entre elles en particulier.

Définition 2. Soient g, h deux granularités sur T.
— g est *plus fine* que h, noté $g \preceq h$, si et seulement si $\forall i \in I_g, \exists j \in I_h \colon g_i \subseteq h_j$, *i.e.* chaque granule de g est inclus dans un granule de h.

— h est *plus grossière* que g [1], noté $g \sqsubseteq h$, si et seulement si $\forall j \in I_h, \exists S \subseteq I_g \colon h_j = \bigcup_{i \in S} g_i$, *i.e.* chaque granule de h est composé de granules de g.

Les relations $\preceq$ et $\sqsubseteq$ sont des ordres partiels ; elles donnent deux caractérisations différentes de la notion intuitive d'être « plus précis », chacune nécessitant que les deux granularités soient alignées. Si $g \preceq h$ et $g \sqsubseteq h$, alors l'ensemble des granules de g est une partition de l'ensemble des granules de h.

Bettini *et al.* ont aussi défini deux opérateurs de conversion entre granularités. Ils associent à un granule d'une granularité donnée un ensemble correspondant de granules d'une autre granularité. La conversion ascendante $\uparrow$, qui convertit un granule vers une granularité « moins précise », est définie par :

$$\forall i \in I_g, \quad \uparrow_g^h i = \{\, j \in I_h : g_i \subseteq h_j \,\}$$

La conversion descendante $\downarrow$, qui convertit un granule vers une granularité « plus précise », est définie par :

$$\forall j \in I_h, \quad \downarrow_g^h j = \left\{ S \subseteq I_g : h_j = \bigcup_{i \in S} g_i \right\}$$

Proposition 3. *Soient g et h deux granularités sur T, et soient $i \in I_g$ et $j \in I_h$. Si $g \preceq h$ (resp. $g \sqsubseteq h$), alors $\uparrow_g^h i$ (resp. $\downarrow_g^h j$) contient exactement un élément.*

2.2 Calendrier grégorien

Pour représenter des relations entre événements, nous devons d'abord choisir un ensemble de granularités. Le calendrier grégorien, dans lequel les échelles des mois, années, semaines et jours sont des granularités (les échelles des heures, minutes et secondes peuvent facilement être ajoutées), est sûrement le plus utilisé. Pour chaque couple (g, h) de ces granularités tel que g est (intuitivement) « plus précise » que h, les propriétés $g \preceq h$ et $g \sqsubseteq h$ sont toutes deux vérifiées (par exemple, « mois $\preceq$ années » et « mois $\sqsubseteq$ années »), sauf pour les couples semaines-mois et semaines-années : puisque leurs granules ne sont pas alignés, les semaines ne sont pas plus fines que les mois et les années, et les mois et les années ne sont pas plus grossiers que les semaines.

Notons que les granularités ne sont pas nécessairement une partition du domaine temporel, puisqu'il peut y avoir des trous. En effet, si nous considérons la granularité des semaines de travail, dans laquelle les granules sont les périodes du lundi au vendredi (les week-ends sont exclus), nous avons « semaines de travail $\preceq$ semaines » et « jours $\sqsubseteq$ semaines de travail », mais nous n'avons pas « semaines de travail $\sqsubseteq$ semaines » et « jours $\preceq$ semaines de travail » [Bettini *et al.*, 2000].

1. Cette relation est appelée « g groups into h » par Bettini *et al.*

3 Relations temporelles avec des granularités

Dans cette section, nous commençons par définir les relations entre points dans le contexte des granularités temporelles, basées sur le cadre formel de Bettini *et al.* [2000]. Ensuite, nous nous intéressons aux relations granulaires entre points et intervalles. Enfin, nous montrons certaines des possibilités de modélisation offertes par notre formalisme.

3.1 Relations granulaires entre points

Nous commençons par définir formellement les relations granulaires entre points, ce qui n'avait pas été fait dans le travail original d'Euzenat [1995]. Grâce à cette formalisation, nous pouvons exhiber des conditions suffisantes pour utiliser nos tables de conversions granulaires (et également celles d'Euzenat). Dans notre formalisme, nous considérons trois *relations élémentaires* possibles entre deux points à une granularité donnée, définies comme suit :

Définition 4. Soient $a, b \in T$. Les relations granulaires entre points « avant à la granularité g » $<^g$, « égal à la granularité g » $=^g$, et « après à la granularité g » $>^g$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
a <^g b &\iff \exists i, j \in I_g \colon i < j \ \wedge\ a \in g_i \ \wedge\ b \in g_j \\
a =^g b &\iff \exists i \in I_g \colon a, b \in g_i \\
a >^g b &\iff \exists i, j \in I_g \colon i > j \ \wedge\ a \in g_i \ \wedge\ b \in g_j
\end{aligned}$$

On dit qu'un point temporel a est *représentable* à une granularité g si $a \in \bigcup_{i \in I_g} g_i$, et on le note par $a \propto g$. Lorsque deux points temporels sont représentables à une granularité g, alors les trois relations sont exhaustives : si $a \propto g$ et $b \propto g$, alors $a <^g b$ ou $a =^g b$ ou $a >^g b$. Elles sont aussi exclusives puisque l'on ne peut avoir plus d'une relation granulaire élémentaire entre deux points.

3.2 Relations granulaires entre points et intervalles

Nous définissons une entité temporelle E comme un couple de points temporels $(e^-, e^+) \in T^2$ tel que $e^- \leq e^+$. Ce couple représente l'ensemble des points situés entre e^- et e^+ dans T, c'est-à-dire $\{t \in T : e^- \leq t \leq e^+\}$. Une entité temporelle E est dite représentable à une granularité g si $e^- \propto g$ et $e^+ \propto g$; nous le noterons par $E \propto g$. À une granularité g, E peut être de deux

r_{AB}	$a^-\ R\ a^+$	$b^-\ R\ b^+$	$a^-\ R\ b^-$	$a^-\ R\ b^+$	$a^+\ R\ b^-$	$a^+\ R\ b^+$
$<$	$=$	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$
$\cdot a$	$=$	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$
$\cdot b$	$=$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$
b	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$	$<$
o	$<$	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$
m	$<$	$<$	$<$	$<$	$=$	$<$
d	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$
$\cdot d$	$=$	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$
s	$<$	$<$	$=$	$<$	$>$	$<$
$\cdot s$	$=$	$<$	$=$	$<$	$=$	$<$
f	$<$	$<$	$>$	$<$	$>$	$=$
$\cdot f$	$=$	$<$	$>$	$=$	$>$	$=$
e	$<$	$<$	$=$	$<$	$>$	$=$
$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$

TABLE 1 – Définitions des relations granulaires entre intervalles et points à partir des relations granulaires entre points à la même granularité (les exposants sont omis pour des raisons de clarté).

types : si $e^- =^g e^+$, alors E est un point, tandis que si $e^- <^g e^+$, alors E est un intervalle.

Il y a ainsi trois catégories de relations élémentaires possibles entre deux entités à une granularité g donnée. La première concerne les relations d'intervalles : est avant (*before*), rencontre (*meets*), chevauche (*overlaps*), démarre (*starts*), est pendant (*during*), et finit (*finishes*), notées b^g, m^g, o^g, s^g, d^g, et f^g ; leurs inverses, notés $\bar{r}^g$ (avec r^g une de ces relations) ; et la relation égal, notée e^g. La deuxième concerne les relations entre points : avant $<^g$, égal $=^g$, et après $>^g$. Enfin, la troisième catégorie concerne les relations entre un point et un intervalle : avant $\cdot b^g$, durant $\cdot d^g$, démarre $\cdot s^g$, finit $\cdot f^g$, et après $\cdot a^g$; et leurs inverses, les relations entre un intervalle et un point, qui sont aussi notées par $\bar{r}^g$, avec r^g la relation correspondante entre un point et un intervalle.

Les définitions de ces relations entre entités temporelles à une granularité donnée se trouvent dans la table 1 ; ce sont les mêmes que dans le cadre non granulaire, c'est-à-dire sur le domaine temporel [Krokhin et Jonsson, 2002]. Par exemple, soit $A = (a^-, a^+)$ et $B = (b^-, b^+)$ deux entités temporelles ; $A\ m^g\ B$ est vrai si $a^- <^g a^+$, $b^- <^g b^+$, et $a^+ =^g b^-$. Pour obtenir les définitions des relations inverses, il faut remplacer « $<$ » par « $>$ » et « $>$ » par « $<$ » dans les colonnes 4 à 7, puis permuter les colonnes 2 et 3 ainsi que les colonnes 5 et 6. Dans la suite, on notera par $\mathcal{R}$ l'ensemble des 26 relations élémentaires.

Dans de nombreuses situations, les bornes des entités ne sont pas connues, et généralement, même la relation élémentaire entre deux entités n'est pas connue. Souvent, en effet, de nombreuses relations élémentaires sont possibles, et il n'y a aucun moyen d'en choisir une. La définition suivante est utilisée pour représenter de telles ambiguïtés.

Définition 5. Une *relation générale* R est un ensemble de relations élémentaires : $R = \{ r_1, \ldots, r_n \} \subseteq \mathcal{R}$. On dit que R est vraie entre deux entités temporelles A, B à la granularité g, noté $A\ R^g\ B$ ou $A\ (r_1 \cdots r_n)^g\ B$, si et seulement si l'expression $\bigvee_{i=1}^{n} A\ r_i^g\ B$ est vraie.

Par exemple, la relation « à la granularité h, A est un intervalle et est avant ou rencontre B, ou A est un point et est avant B qui est un intervalle » est représentée par $A\ (\cdot b\, b\, m)^h\ B$.

3.3 Modéliser des relations temporelles imprécises

Les relations granulaires sont généralement imprécises. En fait, quand on change de granularité, les relations peuvent devenir ambiguës (voir section 4.1). Ainsi, on peut interpréter la relation granulaire « rencontre » comme « rencontre presque », avec une précision qui dépend de la granularité. Par exemple, on peut modéliser « rencontre à peu près » en utilisant une certaine granularité et « rencontre pratiquement » en utilisant une granularité plus fine. Les granularités permettent de relaxer les relations entre points et intervalles, ce qui est utile pour modéliser des phénomènes naturels ayant une synchronisation imparfaite ou des relations temporelles exprimées en langage naturel.

De plus, en combinant différentes relations granulaires exprimées à différentes granularités entre deux mêmes entités, nous pouvons modéliser de nouvelles relations intuitives et imprécises. La plupart de ces relations combinées sont plus restrictives que les relations classiques. Soient g et h des granularités telles que g est « plus précise » que h ; la relation intuitive « juste avant » peut être modélisée par « $A\ (\cdot b)^g\ B$ et $A\ (=)^h\ B$ », ou par « $A\ (b)^g\ B$ et $A\ (m)^h\ B$ », ou par « $A\ (\cdot\bar{a})^g\ B$ et $A\ (\cdot\bar{f})^h\ B$ », etc., en fonction des types des entités temporelles aux deux granularités (si les types sont inconnus, une relation générale peut être utilisée : « $A\ (\cdot b\, b)^g\ B$ et $A\ (=e)^h\ B$ », etc.). Suivant l'application envisagée, il peut être important de garder à l'esprit que cette modélisation de « juste avant » a un sens plus fort que celui du sens commun. Cependant, elle est pertinente, car en langage naturel, la précision associée aux relations est inconnue, comme elle peut varier d'une personne à une autre. Cela peut être représenté dans notre formalisme en utilisant les granularités qualitatives, c'est-à-dire en ne spécifiant aucune information à propos de la structure des granularités, excepté leurs précisions relatives grâce aux relations $\preceq$ et $\sqsubseteq$. Les granularités qualitatives permettent de modéliser et d'utiliser un concept de proximité non métrique.

4 Algèbre des relations temporelles granulaires et raisonnement

Dans cette section, nous définissons les opérateurs de notre algèbre et leurs règles, qui nous permettent de déduire de nouvelles relations. Ensuite, nous montrons les avantages des relations granulaires entre points et intervalles pour le raisonnement.

4.1 Conversion entre granularités

Savoir qu'une relation R est vraie à une granularité g entre A et B peut informer sur la relation entre A et B à une autre granularité. De manière plus intuitive, si A est avant B à une certaine granularité, B ne peut être avant A à une autre granularité. Cependant, l'information déduite manque souvent de précision. En effet, le changement de granularité peut induire une perte d'information. Ainsi, convertir une relation élémentaire à une granularité différente peut donner une relation générale. Dans la suite, nous introduisons une table de conversion, qui montre comment on peut déduire de l'information d'une granularité à une autre. Ensuite, nous présentons des conditions suffisantes pour que cette table puisse s'appliquer.

Définition 6. Pour chaque relation élémentaire non inverse $r \in \mathcal{R}$, nous définissons la *conversion ascendante* $\uparrow r$ et la *conversion descendante* $\downarrow r$ de r comme une relation générale en utilisant la table 2. La conversion d'une relation élémentaire inverse est ensuite définie par $\downarrow\bar{r} = \bigcup_{s \in \downarrow r} \bar{s}$ et $\uparrow\bar{r} = \bigcup_{s \in \uparrow r} \bar{s}$.

r	$\uparrow r$	$\downarrow r$
b	$b\,\cdot\bar{a}\,\cdot b\ <\ \cdot\bar{f}\,\cdot s\,m\ =$	b
$\cdot a$	$\cdot a\ >\ \cdot f\ =$	$\cdot a\,\bar{b}$
$\cdot b$	$\cdot b\ <\ \cdot s\ =$	$\cdot b\,b$
$<$	$<=$	$<\ \cdot b\,\cdot\bar{a}\,b$
o	$o\,m\,\cdot s\,s\,\cdot\bar{f}\,\bar{f}\,e\ =$	o
m	$m\,\cdot s\,\cdot\bar{f}\ =$	$m\,o\,b$
d	$\cdot s\,s\,\cdot d\,d\,\cdot f\,f\,e\ =$	d
$\cdot d$	$\cdot s\,\cdot d\,\cdot f\ =$	$\cdot d\,d$
s	$s\,\cdot s\,e\ =$	$s\,o\,d$
$\cdot s$	$\cdot s\ =$	$m\,o\,\cdot s\,s\,\cdot d\,d\,\cdot b\,b$
f	$f\,\cdot f\,e\ =$	$f\,d\,\bar{o}$
$\cdot f$	$\cdot f\ =$	$\bar{m}\,\bar{o}\,\cdot d\,d\,\cdot f\,f\,\cdot a\,\bar{b}$
e	$e\ =$	$e\,o\,\bar{o}\,s\,\bar{s}\,f\,\bar{f}\,d\,\bar{d}$
$=$	$=$	$\mathcal{R}$ (toutes)

TABLE 2 – Conversion des relations entre points et intervalles.

Finalement, la conversion d'une relation générale est donnée par $\uparrow R = \bigcup_{r \in R} \uparrow r$ et $\downarrow R = \bigcup_{r \in R} \downarrow r$.

Théorème 7. *Soient A et B deux entités temporelles, g et h deux granularités, et R une relation générale.*
- *Si $g \sqsubseteq h$, alors $A\ R^h\ B \implies A\ (\downarrow R)^g\ B$.*
- *Si $g \preceq h$, alors $A\ R^g\ B \implies A\ (\uparrow R)^h\ B$.*

Démonstration. Nous représentons chaque relation élémentaire entre points et intervalles comme une conjonction de relations entre les bornes des entités, en utilisant la table 1. Ensuite, en combinant la propriété « g est plus fine que h » ou « g est plus grossière que h » avec la définition des granularités, nous obtenons une conjonction de disjonctions de relations de points entre les bornes des entités, que nous pouvons reconvertir en une disjonction de relations entre points et intervalles, grâce à la distributivité entre conjonction et disjonction.

Par exemple, si $A\ s^g\ B$, alors $b^- =^g a^- <^g a^+ <^g b^+$ et ainsi il existe $i, j, k \in I_g$ tels que $a^-, b^- \in g_i$, $a^+ \in g_j$, $b^+ \in g_k$, et $i < j < k$. Selon la définition 1, comme $i < j < k$, nous trouvons $a^-, b^- < a^+ < b^+$. Puisque $g \preceq h$, il existe $i', j', k' \in I_h$ tels que $g_i \subseteq h_{i'}$, $g_j \subseteq h_{j'}$, et $g_k \subseteq h_{k'}$. Par conséquent, $a^-, b^- \in h_{i'}$ et ainsi $a^- =^h b^-$; de plus, par contraposition du second point de la définition 1, nous déduisons que $i' \leq j' \leq k'$. Par conséquent, $a^- =^h b^- \leq^h a^+ \leq^h b^+$, ce qui correspond à quatre des lignes de la table 1. Finalement, nous concluons que $A\ (s\cdot s\, e\ =)^h\ B$.

Concernant les relations générales, puisque $A\ R^g\ B \iff \bigvee_{r\in R} A\ r^g\ B$, en utilisant le même mécanisme que ci-dessus et sachant que la disjonction est commutative et associative, on peut montrer le résultat. □

Comme exemple d'utilisation de ce théorème, considérons la relation $A\ (\cdot b\, b\, m)^h\ B$ mentionnée dans la section 3.2 : si $g \sqsubseteq h$, on peut conclure que $A\ (m\, o\, b\cdot b)^g\ B$ par conversion descendante.

Ce théorème montre que les conversions granulaires de relations entre entités temporelles ont des conditions suffisantes qui sont faciles à vérifier [2]. De plus, nous pouvons aussi définir une table de conversion entre granularités qui ne sont pas alignées. Cependant, cela n'est pas nécessaire, car une telle conversion reviendrait à appliquer une conversion alignée descendante suivi d'une conversion alignée ascendante, ce qui est presque toujours possible en utilisant le domaine temporel comme intermédiaire, grâce à la propriété suivante.

Proposition 8. *Soit g une granularité sur T.*
— *$T \sqsubseteq g$ est toujours vraie.*
— *Si $\bigcup_{i\in I_g} g_i = T$ alors $T \preceq g$.*

Ainsi, dans le cas du calendrier grégorien ou de celui des granularités qui sont généralement utilisées dans le cadre du langage naturel, $T \preceq g$ et $T \sqsubseteq g$ sont vérifiées. Par conséquent, pour la majorité des applications que nous envisageons, notre table peut être utilisée même si les conditions ne sont pas satisfaites, ce qui rend possible, par exemple, une conversion entre les semaines et les mois ou les semaines et les années.

4.2 Le raisonnement dans le cadre de notre algèbre temporelle

Les algèbres temporelles permettent de faire des déductions à propos des relations entre entités temporelles grâce à leurs opérateurs. Les algèbres temporelles classiques ont trois opérateurs : la composition $\circ$, l'intersection $\cap$, et l'inversion $\bar{\cdot}$. Dans le cadre de notre formalisme, ces opérateurs ne sont utilisés qu'entre relations définies à la même granularité (voir leur définition par Meiri [1996]). De plus, la composition classique permet de déduire le type des entités temporelles (point ou intervalle) s'il y a une ambiguïté. Pour définir notre algèbre, nous ajoutons à ces trois opérateurs nos opérateurs de conversion granulaire $\uparrow$ et $\downarrow$ (voir table 2), qui permettent de convertir des relations d'une granularité à une autre. Les règles pour déduire de nouvelles relations à partir des opérateurs sont résumées dans la table 3.

4.3 Raisonner avec des relations imprécises

Comme expliqué dans la section 3.3, grâce aux relations définies sur plusieurs granularités, on peut représenter, par exemple, la relation « A est juste avant B et B finit peu après » par $A\ b^{mn}\ B$ et $A\ (=)^{hour}\ B$, et la relation « A est réellement avant C » par $A\ (\cdot b\, b)^{hour}\ C$. Il est intéressant de noter qu'en utilisant nos opérateurs, on déduit que $B\ b^{mn}\ C$, alors que cette conclusion n'aurait pas pu être obtenue si nous n'avions que $A\ b\ B$ et $A\ b\ C$ (comme cela serait le cas sans granularités).

Par ailleurs, contrairement à ce que l'on pourrait penser, il n'est pas suffisant de convertir toutes les relations à la granularité désirée (par exemple la plus fine) et ensuite de ne composer les relations qu'à cette granularité. Par exemple, soit g une granularité telle que $T \preceq g$ et A, B, C des entités temporelles telles que $A\ (<)^T\ B$, $B\ (>)^T\ C$, $A\ (<>)^T\ C$, et $A\ (=)^g\ B$, $B\ (<>)^g\ C$, $A\ (<>)^g\ C$. Par conversion descendante et composition, on ne déduit rien. Cependant, avec une conversion ascendante, on trouve $B\ (>)^g\ C$; par composition, on a $A\ (>)^g\ C$; et par conversion descendante, on déduit $A\ (>)^T\ C$.

De plus, combiner les relations entre intervalles avec les relations entre points ou les relations entre un point et un intervalle à une granularité plus grossière permet de déduire des relations plus précises. En effet, grâce à cette combinaison, on peut alors prendre en compte le fait que certaines bornes d'entités temporelles deviennent indiscernables (*i.e.* égales à la granularité grossière) alors que d'autres non, et en déduire l'ordre de ces bornes. Par exemple, si a et b sont indiscernables et que c n'est pas indiscernable de a ou b, alors c n'est pas entre a et b à une granularité plus fine. Par conséquent, raisonner avec toutes les granularités en même temps fournit plus d'informations et permet de détecter plus d'incohérences.

5 Cohérence

Dans cette section, nous nous intéressons à la vérification de la cohérence de *réseaux de contraintes* d'entités temporelles liées par des relations temporelles granulaires dans le contexte des granularités qualitatives. Plus précisément, un réseau de contraintes est cohérent

2. Ces conditions suffisantes s'appliquent aussi à la table de conversion des relations entre points d'Euzenat, et également à sa table de conversion des relations entre intervalles — mais uniquement si les intervalles ne deviennent pas des points lorsque la granularité de destination est plus grossière ; cependant, cette dernière condition nécessite de connaître les durées des granules et des intervalles.

Opérateur	Règle
$\circ$	$\exists C \in \mathcal{E} \,:\, A\,R^g\,C \,\wedge\, C\,S^g\,B \;\Leftrightarrow\; A\,(R \circ S)^g\,B$
$\uparrow$	$g \preceq h \,\wedge\, A\,R^g\,B \;\Rightarrow\; A\,(\uparrow R)^h\,B$
$\downarrow$	$g \sqsubseteq h \,\wedge\, A\,R^h\,B \;\Rightarrow\; A\,(\downarrow R)^g\,B$
$\cap$	$A\,R^g\,B \,\wedge\, A\,S^g\,B \;\Leftrightarrow\; A\,(R \cap S)^g\,B$
$\bar{\cdot}$	$A\,R^g\,B \;\Leftrightarrow\; B\,\bar{R}^g\,A$

Table 3 – Règles pour déduire de nouvelles relations ; A, B sont des entités temporelles, g, h sont des granularités, et $R, S \subseteq \mathcal{R}$ sont des relations générales.

si on peut trouver une instanciation de ses variables qui satisfait toutes les contraintes. Dans le contexte des algèbres temporelles, ce problème apparaît, par exemple, dans la planification avec des contraintes temporelles [Allen, 1991] ou dans la reconnaissance de plans [Song, 1994].

Nous commençons par définir ce qu'est un réseau de contraintes dans notre contexte, et nous donnons un algorithme polynomial qui calcule la clôture algébrique d'un tel réseau, pouvant être utilisée pour vérifier sa cohérence. Dans ce qui suit, nous supposons que $T \preceq g$ pour toute granularité g ; c'est-à-dire que nous ne nous intéressons pas aux granularités avec des trous (voir la proposition 8), ainsi toutes les granularités g, h vérifient $g \preceq h \iff g \sqsubseteq h$.

5.1 Réseau de contraintes, clôture algébrique

Un réseau de contraintes dans le cadre de notre approche consiste en un ensemble de variables, représentant des entités temporelles $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ et des granularités $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_m\}$, et en un ensemble de contraintes entre ces variables, de la forme « $E_i\ R^{g_k}\ E_j$ » (avec $R \subseteq \mathcal{R}$), et « $g_i \preceq g_j$ ». Si la relation entre deux granularités est inconnue, elle peut être omise ; mais chaque granularité est nécessairement plus grossière (et donc moins fine) que le domaine temporel. Ainsi les granularités forment un treillis. Un réseau de contraintes est un *scénario* s'il y a une relation élémentaire comme contrainte entre chaque couple de variables, à chaque granularité. Une *solution* d'un réseau de contraintes est une instanciation de toutes les variables qui satisfait toutes les contraintes, c'est-à-dire une affectation de granularités aux g_i telle que toutes les relations $\preceq$ soient satisfaites, et une affectation d'entités aux E_i telle que toutes les relations granulaires entre elles soient satisfaites. Un réseau de contraintes est dit *cohérent* s'il possède au moins une solution.

Notons que ces réseaux de contraintes utilisent des *granularités qualitatives* : aucune information quantitative n'est utilisée — il n'est donc pas possible de vérifier la cohérence de réseaux de contraintes pour un ensemble spécifique de granularités, tel que le calendrier grégorien, bien qu'une incohérence dans le cadre des granularités qualitatives implique une incohérence dans un cadre où les granularités seraient instanciées. Les granularités qualitatives sont, en particulier, destinées à être utilisées lorsque les granularités mises en jeu ne sont pas complètement connues (par exemple, dans le cadre du langage naturel) ou que cette connaissance est imprécise, et lorsqu'il est nécessaire de relaxer ou d'approximer le cadre quantitatif.

Sans granularités, la clôture algébrique d'un réseau de contraintes est un réseau de contraintes qui a exactement le même ensemble de solutions et qui satisfait la propriété suivante : $\forall A, B, C \in \mathcal{E}, R_{AC} \subseteq R_{AB} \circ R_{BC}$, où R_{XY} est l'ensemble des relations élémentaires entre les entités X et Y. Nous généralisons cette notion en disant qu'un réseau de contraintes granulaires est *algébriquement clos* s'il satisfait $\forall A, B, C \in \mathcal{E}, \forall g \in \mathcal{G}, R^g_{AC} \subseteq R^g_{AB} \circ R^g_{BC}$, et si pour tout $A, B \in \mathcal{E}$ et pour tout $g, h \in \mathcal{G}$ tel que $g \preceq h$, $R^h_{AB} \subseteq {\uparrow} R^g_{AB}$ et $R^g_{AB} \subseteq {\downarrow} R^h_{AB}$. Autrement dit, appliquer n'importe quel opérateur ne fournit aucune information supplémentaire.

5.2 Cohérence et clôture algébrique

Vérifier la cohérence d'un réseau de contraintes est un problème NP-complet pour l'algèbre des intervalles et l'algèbre des points et des intervalles [Krokhin et Jonsson, 2002]. Dans ce contexte, une approche classique pour vérifier la cohérence est d'explorer tous les scénarios d'un réseau de contraintes, en élaguant de nombreux cas incohérents grâce à la clôture algébrique, puisqu'un scénario est cohérent si et seulement si sa clôture algébrique ne contient pas d'ensemble vide comme relation entre deux entités. Cette équivalence est aussi vraie pour certains réseaux de contraintes qui ne sont pas des scénarios, par exemple, ceux associés à l'algèbre des points ou à la sous-classe ORD-Horn de l'algèbre des intervalles [Nebel et Bürckert, 1995]. En général, la clôture algébrique permet de détecter certaines incohérences, mais pas toutes.

De plus, pour certaines algèbres, calculer la clôture algébrique ne suffit pas toujours à vérifier la cohérence d'un scénario [Renz et Ligozat, 2005].

Ce n'est heureusement pas le cas avec notre algèbre : bien que le problème de vérification de la cohérence soit NP-complet — puisqu'avec une seule granularité, notre algèbre correspond à celle des points et intervalles — on peut malgré tout s'appuyer sur la proposition suivante.

Proposition 9. *Un scénario est cohérent si et seulement si sa clôture algébrique ne contient pas l'ensemble vide comme relation entre deux entités à une des granularités.*

Démonstration. L'idée principale est que les bornes des entités sont totalement ordonnées à chaque granularité, puisqu'il n'y a aucun ensemble vide dans la clôture algébrique. Nous commençons par exprimer les contraintes du scénario en utilisant les relations granulaires des points. Ensuite, nous utilisons l'algorithme suivant pour instancier les variables : premièrement, on instancie chacune des bornes des entités temporelles de sorte que les contraintes du domaine temporel soient vérifiées. Deuxièmement, pour chaque granularité, on construit ses granules comme des intervalles $[a, b[$ tels que toutes les bornes des entités qui sont égales à cette granularité, et uniquement elles, appartiennent au même granule, où a est la plus petite de ces bornes et b est la plus petite des bornes qui sont après à cette granularité. Puisque la table de conversion est respectée et puisque l'algorithme a construit un alignement correct, on peut prouver que les granularités ainsi générées respectent bien la relation $\preceq$. □

Grâce à cette propriété, la clôture algébrique peut, en particulier, être utilisée dans une recherche vérifiant la cohérence d'un réseau de contraintes (exhibant un scénario cohérent) [Renz et Ligozat, 2005]. Nous pouvons, par exemple, utiliser la procédure de Ladkin et Reinefeld [1992], en remplaçant leur algorithme de cohérence de chemin par l'algorithme de clôture algébrique présenté la section suivante.

5.3 Algorithme de clôture algébrique

L'algorithme 1 calcule la clôture algébrique d'un réseau de contraintes granulaires, et peut détecter des incohérences. Il prend en entrée une liste L de tuples (R, A, B, g) (les contraintes), où A et B sont des entités, g est une granularité, et R est l'ensemble des relations élémentaires autorisées entre A et B à la granularité g. La connaissance courante sur la relation entre A et B à la granularité g est enregistrée dans la variable R^g_{AB} ; initialement, chacune de ces variables est initialisée à $\mathcal{R}$ (l'ensemble de toutes les relations élémentaires), et à la fin, R^g_{AB} contient la relation entre A et B à la granularité g de la clôture algébrique du réseau de contraintes initial.

L'algorithme affine la variable R^g_{AB} courante avec les contraintes dans L, et propage ces nouvelles connaissances en appelant les procédures `convertir` et `composer`. La première procédure convertit la relation courante vers chacune des granularités alignées avec la granularité de cette relation, tandis que la seconde compose la relation courante avec chacune des autres relations de la même granularité. Les contraintes déduites sont ensuite ajoutées à L. Notons que cet algorithme peut aussi être utilisé avec l'algèbre des relations granulaires entre points.

Algorithme 1 : Calcul de la clôture algébrique d'un réseau de contraintes temporelles granulaires.

tant que L *n'est pas vide* **faire**
- $(R, A, B, g) \leftarrow$ `pop`(L)
- $r \leftarrow R \cap R^g_{AB}$
- **si** $r \neq R^g_{AB}$ **alors**
  - **si** $r = \emptyset$ **alors**
    - Il y a une incohérence
  - $R^g_{AB} \leftarrow r$
  - ajouter $(\overline{R^g_{AB}}, B, A, g)$ à L
  - `composer`(A, B, g, L)
  - `convertir`(A, B, g, L)

Procédure `convertir`(A, B, g, L)
- **pour chaque** $h \in \mathcal{G}$ *tel que* $g \preceq h$ **faire**
  - ajouter $(\uparrow R^g_{AB}, A, B, h)$ à L
- **pour chaque** $h \in \mathcal{G}$ *tel que* $h \preceq g$ **faire**
  - ajouter $(\downarrow R^g_{AB}, A, B, h)$ à L

Procédure `composer`(A, B, g, L)
- **pour chaque** $C \in \mathcal{E} \setminus \{A, B\}$ **faire**
  - ajouter $(R^g_{AB} \circ R^g_{BC}, A, C, g)$ à L

Montrons maintenant que l'algorithme 1 est polynomial. S'il y a n entités temporelles, le nombre total de relations à chaque granularité est $n(n-1)$. L'idée est qu'une relation R^g_{AB} ne peut être modifiée plus de 26 fois, puisque sa taille ne fait que décroître. Ainsi, les procédures `composer` et `convertir` ne seront appelées, dans le pire des cas, que $26 \cdot mn(n-1)$ fois. La première procédure effectue $n-2$ compositions, et la deuxième, au plus $m-1$ conversions. Par conséquent, le nombre total d'opérations est borné par $26 \cdot mn(n-1)(n-2+m-1)$. Ainsi, l'algorithme 1 est en $O(mn^2(m+n))$. Si m est fixé, alors l'algorithme est en $O(n^3)$, ce qui correspond à la complexité de l'algorithme de clôture algébrique pour les algèbres temporelles sans granularités.

5.4 Un exemple de raisonnement

Dans cette section, nous montrons comment déduire la relation entre A et C à partir de « A est chevauchée par B, mais elles sont indiscernables sous un point de vue plus grossier », et « B démarre C, et elles ne sont pas égales sous ce même point de vue ». Les contraintes correspondantes sont $g \preceq h$, $A\ (\bar{o})^g\ B$, $A\ (=)^h\ B$, $B\ (s)^g\ C$, et $B\ (\mathcal{R} \setminus \{e, =\})^h\ C$. Par conversion ascendante de $B\ (s)^g\ C$ et intersection, on trouve $B\ (\cdot s\, s)^h\ C$. Par composition de $A\ (=)^h\ B$ et $B\ (\cdot s\, s)^h\ C$, on déduit $A\ (\cdot s)^h\ C$. Enfin, par conversion descendante, on conclut que $A\ (m\, o \cdot s\, s \cdot d\, d \cdot b\, b)^g\ C$. Ensuite, par composition entre $A\ (\bar{o})^g\ B$ et $B\ (s)^g\ C$, on déduit que $A\ (\bar{o}\, d\, f)^g\ C$. Finalement, par intersection, on trouve $A\ (d)^g\ C$. Supposons maintenant qu'on sache également que $A\ (f)^g\ C$; on déduirait $A\ (\emptyset)^g\ C$, et par conséquent on aurait prouvé que le réseau est incohérent.

6 Travaux connexes et discussion

Contrairement à la table de conversion des relations temporelles granulaires entre intervalles présentée par Euzenat [1995], nous n'avons pas besoin d'informations quantitatives, c'est-à-dire des durées des entités temporelles, pour savoir si on peut appliquer les opérateurs de conversion vers une granularité plus fine ou plus grossière : on peut toujours les utiliser. Puisque par changement de granularité, un intervalle peut devenir un point et inversement, dans l'extension granulaire de l'algèbre des intervalles, il n'est pas possible de raisonner avec des granularités très grossières. Notre approche a une plus grande expressivité, permettant d'avoir un domaine temporel dense et des granularités non nécessairement alignées. La table de conversion de notre formalisme permet une fusion de relations temporelles à des précisions différentes qui est plus flexible que la table de conversion originale d'Euzenat. Par exemple, la relation « d'égalité » combinée à la relation « avant » à une granularité plus fine est incohérente avec la table de conversion d'Euzenat, mais elle ne l'est pas avec notre table de conversion puisque l'égalité peut être une égalité entre points. La combinaison de relations entre points et intervalles et relations entre intervalles à différentes granularités réduit l'ambiguïté lors du raisonnement (voir section 4.3). Nous avons la possibilité de ne pas spécifier le type des entités temporelles (point ou intervalle) et de déduire ensuite ce type. De plus, nos opérateurs de conversion vérifient la liste des propriétés désirables que n'importe quel système d'opérateurs de conversion granulaire devrait vérifier selon Euzenat [1995].

Il existe d'autres approches sur le temps granulaire avec des contraintes symboliques. Celle de Badaloni et Berati [1994] combine des contraintes numériques et symboliques, mais seules les contraintes numériques sont converties lors du changement de granularité. Les intervalles sont retirés du réseau de contraintes s'ils deviennent des points à une granularité plus grossière. De plus, le réseau peut devenir incohérent si les granularités associées sont très grossières.

Becher *et al.* [2000] offrent un formalisme dans lequel les granularités sont définies implicitement. En effet, les relations du formalisme décrivent, en particulier, que la granularité de la première entité est plus fine que (resp. plus grossière que, égale à) la granularité de la deuxième entité, sans préciser quelles sont ces granularités.

Bittner [2002] présente une approche basée sur le concept d'approximation. Il fournit une table de conversion, mais elle est moins précise et moins générale que celle introduite dans cet article. Plus précisément, à la granularité la plus grossière, le type des entités n'est pas défini, et à la granularité la plus fine, les entités ne sont que des intervalles. Une autre table de conversion est donnée pour les périodes non convexes. Cependant, ces résultats sont limités à deux granularités.

Pour terminer, Bettini *et al.* [2000] offrent une approche granulaire avec des contraintes numériques ; et des formalismes concernant le temps ancré avec des granularités, où les entités temporelles sont précisément localisées, ont également été proposés et étudiés [Franceschet et Montanari, 2001; Bettini *et al.*, 2000; Montanari, 1996].

7 Conclusion et perspectives

L'ajout des granularités aux algèbres temporelles permet de combiner des informations avec des précisions différentes, de modéliser des relations imprécises et de raisonner sur celles-ci. Grâce à notre généralisation de la table de conversion granulaire des relations d'intervalles d'Euzenat [1995], dans laquelle les relations entre points et intervalles sont permises, les conversions granulaires à une granularité plus fine ou plus grossière peuvent toujours être appliquées. En outre, notre algèbre est plus expressive que celle des relations granulaires d'intervalles, puisque de nouvelles relations intuitives sont modélisables, et les déductions sont plus flexibles et plus précises : les informations qualitatives des différentes granularités sont pleinement utilisées. Avec notre formalisme, nous pouvons vérifier la cohérence d'un ensemble de relations entre des points et des intervalles définies sur plusieurs échelles temporelles et utilisant un concept de proximité qualitative comme dans le langage naturel.

Par ailleurs, notre travail complète théoriquement celui d'Euzenat en exposant des conditions suffisantes pour utiliser les tables de conversion granulaire, en s'appuyant sur la définition des granularités temporelles de Bettini *et al.* [2000].

Ce travail ouvre plusieurs voies de recherche. Actuellement, nous cherchons une sous-classe de notre algèbre pour laquelle la vérification de la cohérence des réseaux de contraintes associés est polynomiale. Nous projetons, dans un futur proche, d'analyser si la clôture algébrique implique la cohérence de chemin quand le domaine temporel est dense. Nous avons également l'intention de généraliser ces idées au raisonnement spatial. De plus, dans un cadre plus général, nous prévoyons d'étudier les conditions sous lesquelles l'ajout des granularités qualitatives à une algèbre des relations préserve la complexité polynomiale de la vérification de la cohérence.

Références

ALLEN, J. F. (1983). Maintaining knowledge about temporal intervals. *Commun. ACM*, 26(11):832–843.

ALLEN, J. F. (1991). Planning as temporal reasoning. *KR*, 91:3–14.

BADALONI, S. et BERATI, M. (1994). Dealing with time granularity in a temporal planning system. *In Temporal Logic*, pages 101–116. Springer.

BECHER, G., CLÉRIN-DEBART, F. et ENJALBERT, P. (2000). A qualitative model for time granularity. *Computational intelligence*, 16(2):137–168.

BETTINI, C., JAJODIA, S. G. et WANG, S. X. (2000). *Time Granularities in Databases, Data Mining and Temporal Reasoning.* Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 1st édition.

BITTNER, T. (2002). Approximate qualitative temporal reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 36(1–2):39–80.

EUZENAT, J. (1995). An algebraic approach to granularity in time representation. *In Proc. 2nd IEEE international workshop on temporal representation and reasoning (TIME), Melbourne (FL US)*, pages 147–154, Regina (CA). University of Regina.

EUZENAT, J. et MONTANARI, A. (2005). Time granularity. *In* FISHER, M., GABBAY, D. et VILA, L., éditeurs : *Handbook of temporal reasoning in artificial intelligence*, pages 59–118. Elsevier, Amsterdam (NL).

FRANCESCHET, M. et MONTANARI, A. (2001). *Dividing and conquering the layered land.* Thèse de doctorat, Department of Mathematics and Computer Science, University of Udine, Italy.

HIRSCH, R. (1996). Relation algebras of intervals. *Artif. Intell.*, 83:267–295.

KROKHIN, A. et JONSSON, P. (2002). Extending the point algebra into the qualitative algebra. *In Temporal Representation and Reasoning, International Syposium on*, pages 28–28. IEEE Computer Society.

LADKIN, P. B. et MADDUX, R. D. (1994). On binary constraint problems. *Journal of the ACM*, 41:435–469.

LADKIN, P. B. et REINEFELD, A. (1992). Effective solution of qualitative interval constraint problems. *Artif. Intell.*, 57(1):105–124.

MEIRI, I. (1996). Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artif. Intell.*, 87(1–2):343–385.

MONTANARI, A. (1996). *Metric and layered temporal logic for time granularity.* ILLC.

NEBEL, B. et BÜRCKERT, H.-J. (1995). Reasoning about temporal relations : a maximal tractable subclass of allen's interval algebra. *Journal of the ACM (JACM)*, 42(1):43–66.

RENZ, J. et LIGOZAT, G. (2005). Weak composition for qualitative spatial and temporal reasoning. *In Principles and Practice of Constraint Programming-CP 2005*, pages 534–548. Springer.

SCHOCKAERT, S., COCK, M. D. et KERRE, E. E. (2006). Imprecise temporal interval relations. *In In Proceedings of the 6th International Workshop on Fuzzy Logic and Applications , LNAI 3849*, pages 108–113. Springer.

SONG, F. (1994). Extending temporal reasoning with hierarchical constraints. *In TIME*, pages 21–28.

VILAIN, M., KAUTZ, H. et BEEK, P. (1986). Constraint propagation algorithms for temporal reasoning. *In Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems*, pages 377–382. Morgan Kaufmann.

VILAIN, M. B. (1982). A system for reasoning about time. *In Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence. Pittsburgh, PA, August 18-20, 1982.*, pages 197–201.