

Compilation de CSPs : carte de complexité des MDDs non-déterministes

Jérôme Amilhastre¹ Hélène Fargier²
Alexandre Niveau³ Cédric Pralet⁴

1. Cameleon Software, Labège — jamilhastre@cameleon-software.com
2. IRIT-CNRS, Toulouse — fargier@irit.fr
3. CRIL-CNRS, Lens — niveau@cril.fr
4. ONERA, Toulouse — cpralet@onera.fr

JFPC — 13 juin 2013

Exemple introductif

- Problème de configuration de produit :
T-shirts personnalisés [Had08]

[Had08] Tarik HADZIC, Esben Rune HANSEN et Barry O'SULLIVAN. « On Automata, MDDs and BDDs in Constraint Satisfaction ». Dans : *Proceedings of the ECAI Workshop on Inference methods based on Graphical Structures of Knowledge (WIGSK)*, 2008

Exemple introductif

- Problème de configuration de produit :
T-shirts personnalisés [Had08]
- Paramètres :
 - motif – « Men in Black » (MiB) ou « Save the Whales » (StW)
 - couleur – noir, bleu, rouge
 - taille – S, M, L
 - manches – avec ou sans

[Had08] Tarik HADZIC, Esben Rune HANSEN et Barry O’SULLIVAN. « On Automata, MDDs and BDDs in Constraint Satisfaction ». Dans : *Proceedings of the ECAI Workshop on Inference methods based on Graphical Structures of Knowledge (WIGSK)*, 2008

Exemple introductif

- Problème de configuration de produit :
T-shirts personnalisés [Had08]
- Paramètres :
 - motif – « Men in Black » (MiB) ou « Save the Whales » (StW)
 - couleur – noir, bleu, rouge
 - taille – S, M, L
 - manches – avec ou sans
- Règles :
 - les T-shirts « MiB » doivent être noirs
 - le motif « StW » ne rentre pas sur les T-shirts taille S
 - les T-shirts L ne sont pas sans-manche

Exemple introductif

- Problème de configuration de produit :
T-shirts personnalisés [Had08]
- Paramètres :
 - motif – « Men in Black » (MiB) ou « Save the Whales » (StW)
 - couleur – noir, bleu, rouge
 - taille – S, M, L
 - manches – avec ou sans
- Règles :
 - les T-shirts « MiB » doivent être noirs
 - le motif « StW » ne rentre pas sur les T-shirts taille S
 - les T-shirts L ne sont pas sans-manche
- Le programme doit pouvoir dire si chaque choix respecte les règles

Problème

- Produit configurable → **problème de satisfaction de contraintes** (CSP)

$$\left\{ \begin{array}{l} motif = \text{MiB} \quad \rightarrow \quad couleur = \text{noir} \\ motif = \text{StW} \quad \rightarrow \quad taille > S \\ taille \leq M \quad \vee \quad manches = \text{avec} \end{array} \right.$$

- chaque variable correspond à un choix
- chaque solution correspond à une configuration admissible

Problème

- Produit configurable → **problème de satisfaction de contraintes** (CSP)

$$\left\{ \begin{array}{l} motif = \text{MiB} \quad \rightarrow \quad couleur = \text{noir} \\ motif = \text{StW} \quad \rightarrow \quad taille > S \\ taille \leq M \quad \vee \quad manches = \text{avec} \end{array} \right.$$

- chaque variable correspond à un choix
- chaque solution correspond à une configuration admissible
- Processus de configuration :
 - chaque choix fixe la valeur d'une certaine variable
 - le CSP est-il encore **cohérent** ?

Problème

- Produit configurable → **problème de satisfaction de contraintes** (CSP)

$$\left\{ \begin{array}{l} motif = \text{MiB} \quad \rightarrow \quad couleur = \text{noir} \\ motif = \text{StW} \quad \rightarrow \quad taille > S \\ taille \leq M \quad \vee \quad manches = \text{avec} \end{array} \right.$$

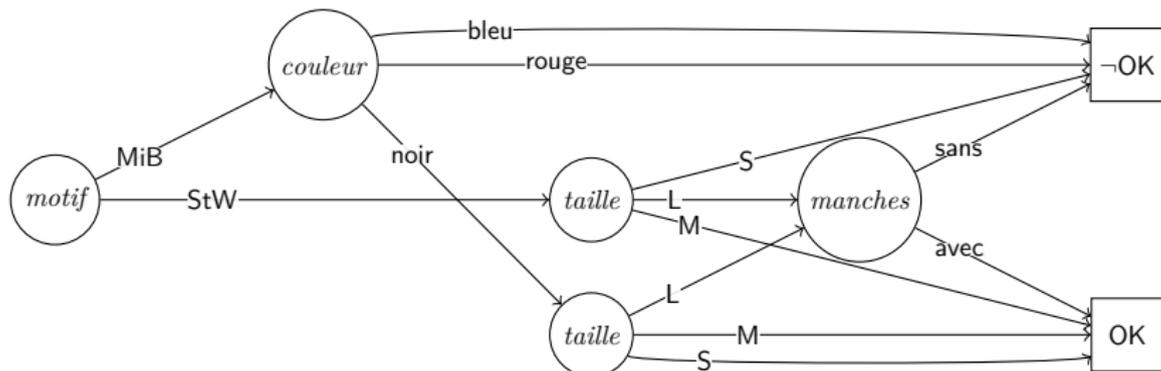
- chaque variable correspond à un choix
- chaque solution correspond à une configuration admissible
- Processus de configuration :
 - chaque choix fixe la valeur d'une certaine variable
 - le CSP est-il encore **cohérent** ?
- Problème NP-complet... mais l'utilisateur ne veut pas attendre trop longtemps après chaque choix

Une solution : la compilation

- Le CSP est une **partie fixe** du problème
- On **compile** ce CSP en une structure de données bien adaptée

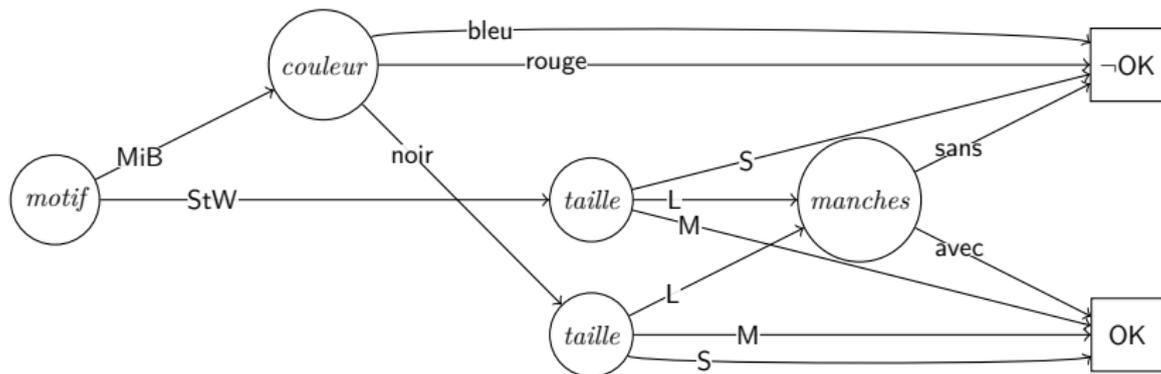
Une solution : la compilation

- Le CSP est une **partie fixe** du problème
- On **compile** ce CSP en une structure de données bien adaptée par exemple un MDD :



Une solution : la compilation

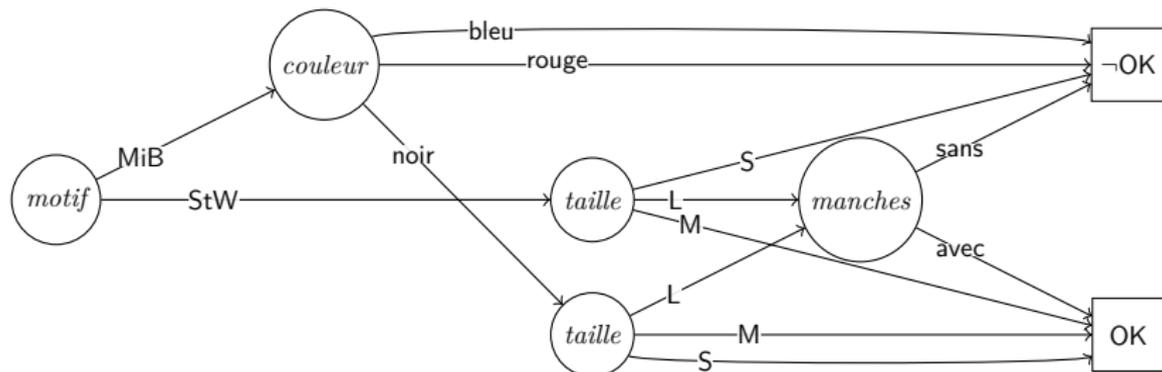
- Le CSP est une **partie fixe** du problème
- On **compile** ce CSP en une structure de données bien adaptée par exemple un MDD :



- Assigner des valeurs aux variables (conditionnement) et vérifier la cohérence sont des opérations **polynomiales** sur les MDDs
- l'attente de l'utilisateur est réduite

Définition originale

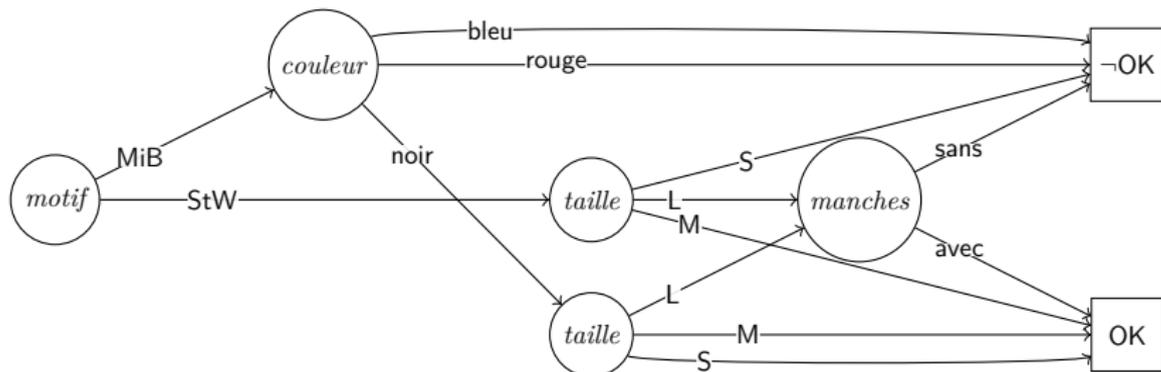
- MDDs : diagrammes de décision multivalués [Sri90]
- En toute généralité, ce sont des BDDs sur des variables multivaluées



[Sri90] Arvind SRINIVASAN, Timothy KAM, Sharad MALIK et Robert K. BRAYTON. « Algorithms for Discrete Function Manipulation ». Dans : *Proceedings of the International Conference on Computer Aided Design (ICCAD)*. Nov. 1990, p. 92-95

Définition originale

- MDDs : diagrammes de décision multivalués [Sri90]
- En toute généralité, ce sont des BDDs sur des variables multivaluées



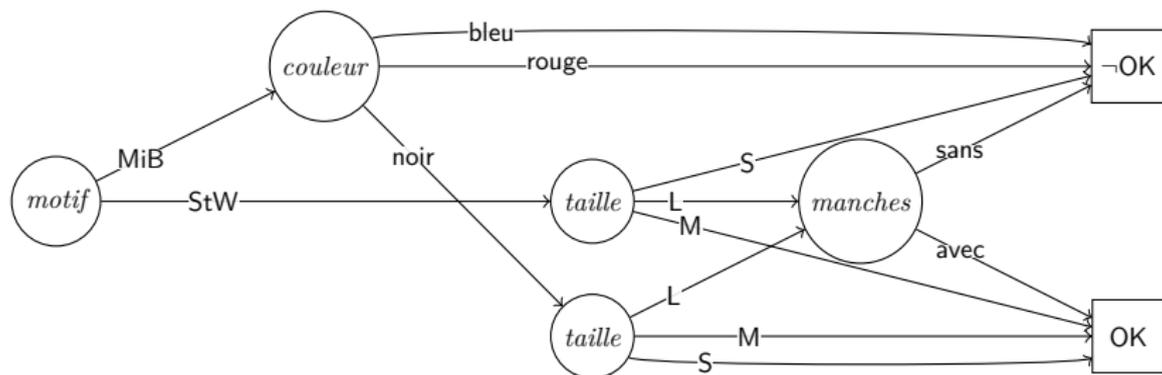
- Exactement un arc sortant par valeur du domaine

→ structure **déterministe**

[Sri90] Arvind SRINIVASAN, Timothy KAM, Sharad MALIK et Robert K. BRAYTON. « Algorithms for Discrete Function Manipulation ». Dans : *Proceedings of the International Conference on Computer Aided Design (ICCAD)*. Nov. 1990, p. 92-95

Définition en pratique

- Les MDDs utilisés en pratique sont **ordonnés**



- On les appelle dOMDDs

Intérêt de l'ordre

- En fixant un ordre, il est polynomial de
 - vérifier la cohérence ou la validité d'un MDD, en compter les modèles...
 - vérifier l'équivalence de deux MDDs
 - construire un MDD équivalent à la conjonction ou la disjonction de deux MDDs

Inconvénient de l'ordre

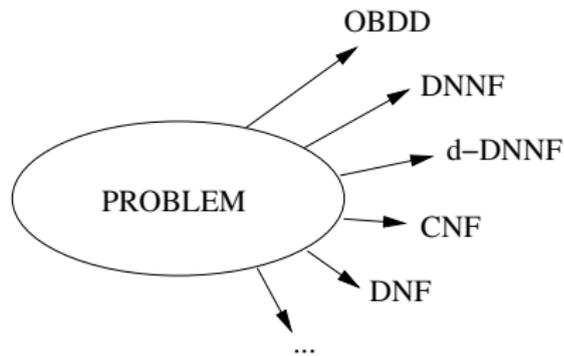
- En contrepartie : explosion en espace (exemple : contrainte alldiff)
- Mais si on n'a pas besoin de l'équivalence, de la conjonction ou de la disjonction, la contrainte est **trop forte**

Inconvénient de l'ordre

- En contrepartie : explosion en espace (exemple : contrainte alldiff)
- Mais si on n'a pas besoin de l'équivalence, de la conjonction ou de la disjonction, la contrainte est **trop forte**
- Exemple des T-shirts : on veut seulement la vérification de cohérence et le conditionnement → le **read-once** suffit
- Il semble profitable de relaxer la contrainte

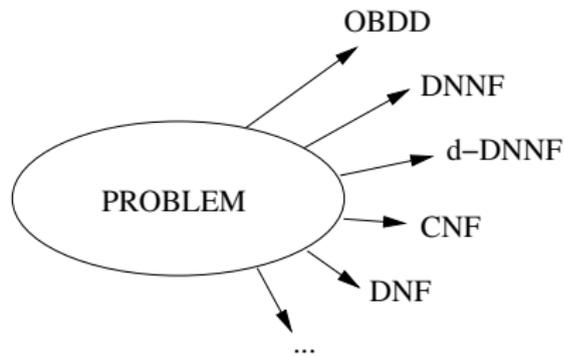
Choix d'une structure de compilation

- Dans le cas booléen :



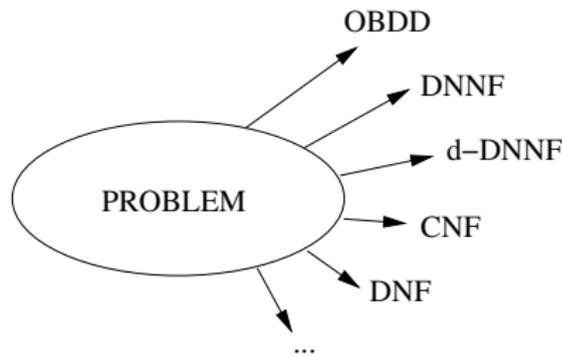
Choix d'une structure de compilation

- Dans le cas booléen : la **carte de compilation** [Dar02]



Choix d'une structure de compilation

- Dans le cas booléen : la **carte de compilation** [Dar02]



- Compare les structures selon deux critères :
 - 1 efficacité des opérations
 - 2 concision

Carte de compilation : opérations

- Toutes les manipulations en ligne se ramènent à des **requêtes** et **transformations** élémentaires

L	CO (consistency) VA (validity)	CE (clause entailmt.) IM (implicant check)	EQ (equivalence) SE (entailment)	CT (model count) ME (model enum.)
NNF	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
DNNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ ○
BDD	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
FBDD	√ √	√ √	○ ○	√ √
OBDD	√ √	√ √	√ ○	√ √
DNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ √
CNF	○ √	○ √	○ ○	○ ○

L	CD (conditioning)	FO (forgetting) SFO (single forg.)	∧C (conjunction) ∧BC (bounded conj.)	∨C (disjunction) ∨BC (bounded disj.)	¬C (negation)
NNF	√	○ √	√ √	√ √	√
DNNF	√	√ √	○ ○	√ √	○
BDD	√	○ √	√ √	√ √	√
FBDD	√	● √	● ○	● ○	√
OBDD	√	○ √	● ○	○ ○	√
DNF	√	√ √	● √	√ √	●
CNF	√	○ √	√ √	● √	●

- √ polynomial
- non polynomial sauf si $P = NP$
- non polynomial

Carte de compilation : opérations

- Toutes les manipulations en ligne se ramènent à des **requêtes** et **transformations** élémentaires

L	CO (consistency) VA (validity)	CE (clause entailmt.) IM (implicant check)	EQ (equivalence) SE (entailment)	CT (model count) ME (model enum.)
NNF	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
DNNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ ○
BDD	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
FBDD	√ √	√ √	○ ○	○ ○
OBDD	√ √	√ √	√ ○	√ √
DNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ ○
CNF	○ √	○ √	○ ○	○ ○

L	CD (conditioning)	FO (forgetting) SFO (single forg.)	∧C (conjunction) ∧BC (bounded conj.)	∨C (disjunction) ∨BC (bounded disj.)	¬C (negation)
NNF	√	○ √	√ √	√ √	√
DNNF	√	√ √	○ ○	√ √	○
BDD	√	○ √	√ √	√ √	√
FBDD	√	● ○	● ○	● ○	√
OBDD	√	○ √	○ ○	○ ○	√
DNF	√	√ √	● √	√ √	●
CNF	√	○ √	√ √	● √	●

- √ polynomial
- non polynomial sauf si $P = NP$
- non polynomial

Carte de compilation : opérations

- Toutes les manipulations en ligne se ramènent à des **requêtes** et **transformations** élémentaires

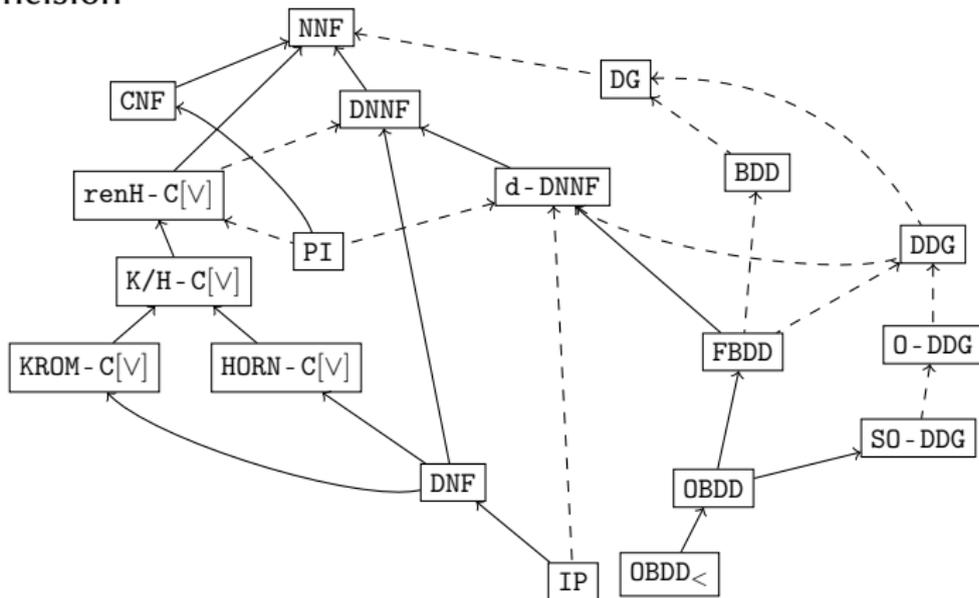
L	CO (consistency) VA (validity)	CE (clause entailmt.) IM (implicant check)	EQ (equivalence) SE (entailment)	CT (model count) ME (model enum.)
NNF	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
DNNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ ○
BDD	○ ○	○ ○	○ ○	○ ○
FBDD	√ √	√ √	○ ○	√ √
OBDD	√ √	√ √	√ ○	√ √
DNF	√ ○	√ ○	○ ○	○ √
CNF	○ √	○ √	○ ○	○ ○

L	CD (conditioning)	FO (forgetting) SFO (single forg.)	∧C (conjunction) ∧BC (bounded conj.)	∨C (disjunction) ∨BC (bounded disj.)	¬C (negation)
NNF	√	○ √	√ √	√ √	√
DNNF	√	√ √	○ ○	√ √	○
BDD	√	○ √	√ √	√ √	√
FBDD	√	● √	● ○	● ○	√
OBDD	√	○ √	● ○	○ ○	√
DNF	√	√ √	● √	√ √	●
CNF	√	○ √	√ √	● √	●

- √ polynomial
- non polynomial sauf si $P = NP$
- non polynomial

Carte de compilation : concision

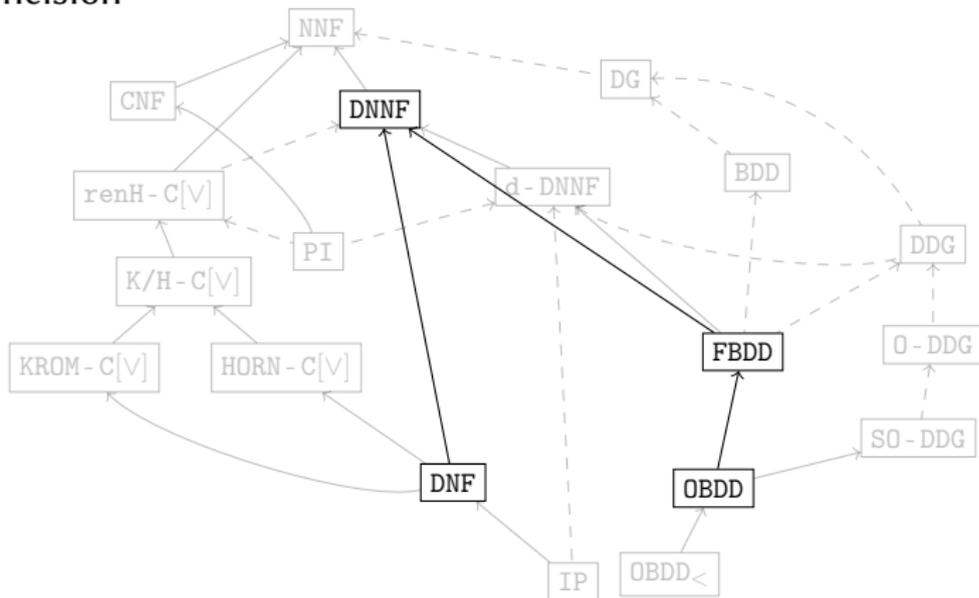
- Relation de concision : ordonne les structures selon leur concision



$L_1 \leftarrow L_2$: L_1 est strictement plus concis que L_2
 $L_1 \leftarrow\!\!\!-\! L_2$: L_1 est « plus concis » que L_2

Carte de compilation : concision

- Relation de concision : ordonne les structures selon leur concision



$L_1 \leftarrow L_2$: L_1 est strictement plus concis que L_2
 $L_1 \leftarrow\!\!\!-\ L_2$: L_1 est « plus concis » que L_2

Carte des MDDs déterministes

L	CO	VA	MC	CE	IM	EQ	SE	MX	CX	CT	ME
dMDD	○	○	✓	○	○	○	○	○	○	○	○
dOMDD	✓	✓	✓	✓	✓	✓	○	✓	✓	✓	○
dOMDD _{<}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

L	CD	TR	FO	SFO	EN	SEN	∨C	∨BC	∧C	∧BC	¬C
dMDD	✓	○	○	✓	○	✓	✓	✓	✓	✓	✓
dOMDD	✓	●	●	●	●	●	●	○	●	○	✓
dOMDD _{<}	✓	●	●	●	●	●	●	✓	●	✓	✓

- Résultats principalement déduits de la littérature [Kam98] [Dar02] [Niv12]

[Kam98] Timothy KAM, Tiziano VILLA, Robert K. BRAYTON et Alberto SANGIOVANNI-VINCENTELLI. « Multi-valued Decision Diagrams : Theory and Applications ». Dans : **Multiple-Valued Logic** 4.1-2 (1998), p. 9-62

[Dar02] Adnan DARWICHE et Pierre MARQUIS. « A Knowledge Compilation Map ». Dans : **Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)** 17 (2002), p. 229-264

[Niv12] Alexandre NIVEAU, Hélène FARGIER et Cédric PRALET. « Representing CSPs with Set-labeled Diagrams : A Compilation Map ». Dans : **Proceedings of the International Workshop on Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning (GKR)2011 — Revised Selected Papers**. T. 7205. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2012, p. 137-171. ISBN : 978-3-642-29448-8

Carte des MDDs déterministes

L	CO	VA	MC	CE	IM	EQ	SE	MX	CX	CT	ME
dMDD	○	○	✓	○	○	○	○	○	○	○	○
dOMDD	✓	✓	✓	✓	○	✓	○	✓	✓	✓	○
dOMDD _{<}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

L	CD	TR	FO	SFO	EN	SEN	VC	VBC	∧C	∧BC	¬C
dMDD	✓	○	○	✓	○	✓	✓	✓	✓	✓	✓
dOMDD	✓	●	●	●	●	●	●	○	●	○	✓
dOMDD _{<}	✓	●	●	●	●	●	●	✓	●	✓	✓

- Résultats principalement déduits de la littérature [Kam98] [Dar02] [Niv12]
- Similaires aux BDDs, sauf pour SFO et SEN
domaines non bornés, donc la décomposition habituelle $\bigvee_{i \in \text{Dom}(x)} \varphi|_{x=i}$
donne $\varphi|_{x=1} \vee \dots \vee \varphi|_{x=n} \rightarrow$ la taille dépend de n , mais VC n'est pas supporté

[Kam98] Timothy KAM, Tiziano VILLA, Robert K. BRAYTON et Alberto SANGIOVANNI-VINCENTELLI. « Multi-valued Decision Diagrams : Theory and Applications ». Dans : **Multiple-Valued Logic** 4.1–2 (1998), p. 9–62

[Dar02] Adnan DARWICHE et Pierre MARQUIS. « A Knowledge Compilation Map ». Dans : **Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)** 17 (2002), p. 229–264

[Niv12] Alexandre NIVEAU, Hélène FARGIER et Cédric PRALET. « Representing CSPs with Set-labeled Diagrams : A Compilation Map ». Dans : **Proceedings of the International Workshop on Graph Structures for Knowledge Representation and Reasoning (GKR)2011 — Revised Selected Papers**. T. 7205. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2012, p. 137–171. ISBN : 978-3-642-29448-8

Relaxation du déterminisme

- Intérêt du déterminisme ?

→ sur les DNNFs, il permet de compter les modèles
mais fait perdre les transformations basées sur la disjonction

Relaxation du déterminisme

- Intérêt du déterminisme ?

→ sur les DNNFs, il permet de compter les modèles
mais fait perdre les transformations basées sur la disjonction

- Qu'en est-il pour les MDDs ?

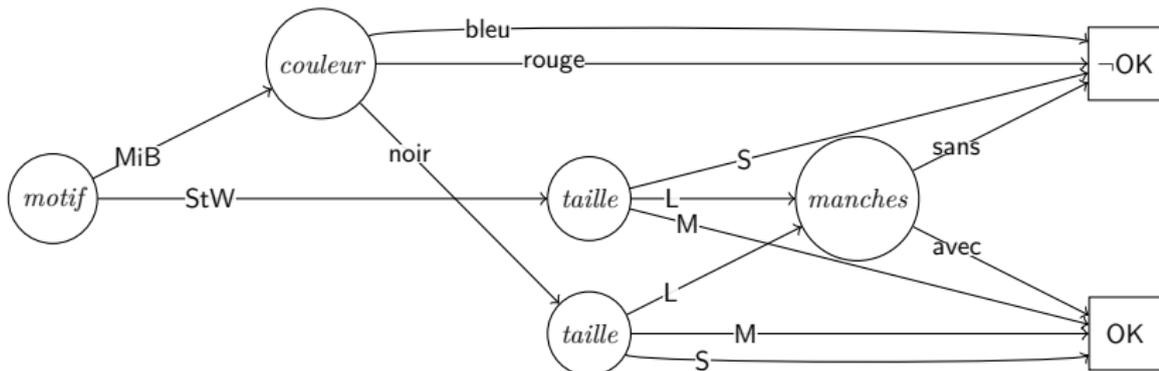
Relaxation du déterminisme

- Intérêt du déterminisme ?
 - sur les DNNFs, il permet de compter les modèles mais fait perdre les transformations basées sur la disjonction
- Qu'en est-il pour les MDDs ?
- **Notre travail** : ajouter les MDDs non-déterministes à la carte

Comment relaxer le déterminisme ?

- Dans un BDD, toute instanciation est associée à un et un seul chemin

→ Il ne peut arriver que dans une seule feuille

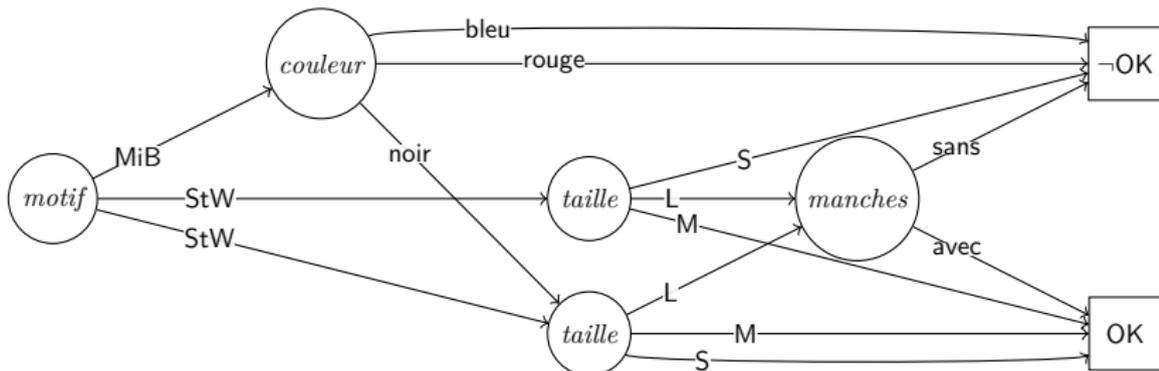


- Si on autorise un choix : on perd cette propriété et donc la « symétrie » des feuilles

Comment relaxer le déterminisme ?

- Dans un BDD, toute instanciation est associée à un et un seul chemin

→ Il ne peut arriver que dans une seule feuille

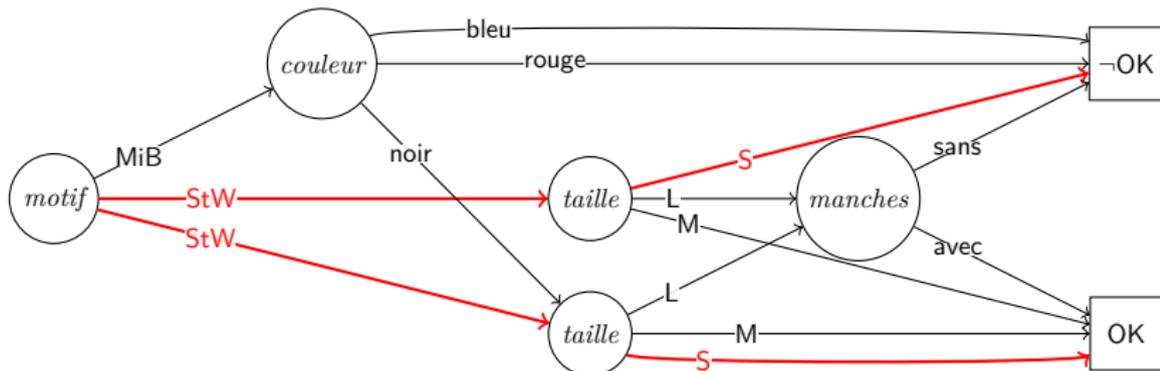


- Si on autorise un choix : on perd cette propriété et donc la « symétrie » des feuilles

Comment relaxer le déterminisme ?

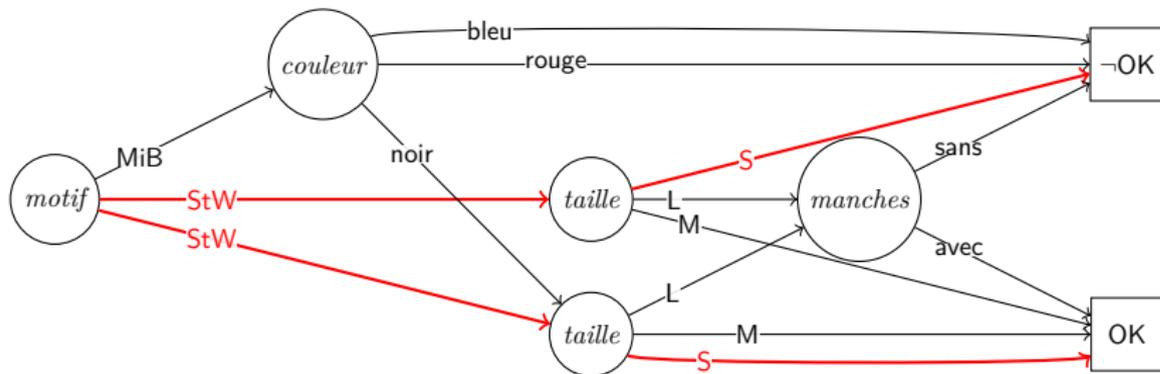
- Dans un BDD, toute instanciation est associée à un et un seul chemin

→ Il ne peut arriver que dans une seule feuille



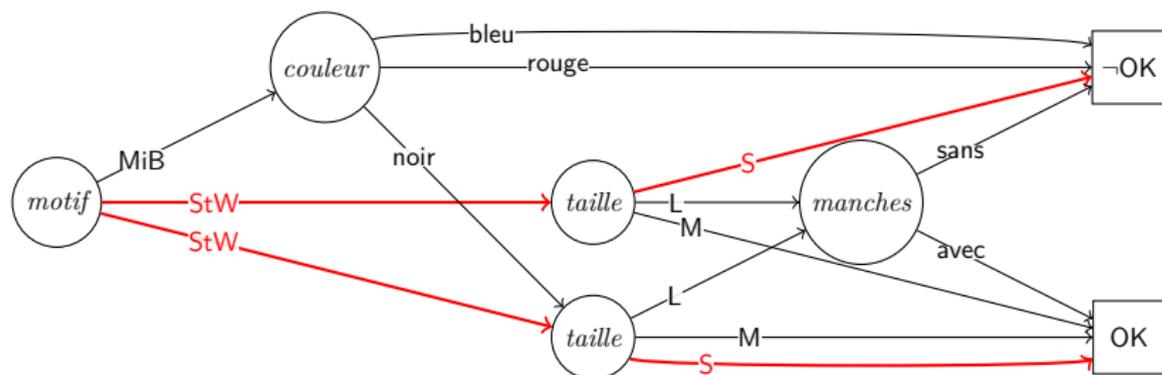
- Si on autorise un choix : on perd cette propriété et donc la « symétrie » des feuilles

Choix de la sémantique



- Comment interpréter une telle instanciation ?
 - on privilégie une feuille
 - majorité
 - parité...

Choix de la sémantique



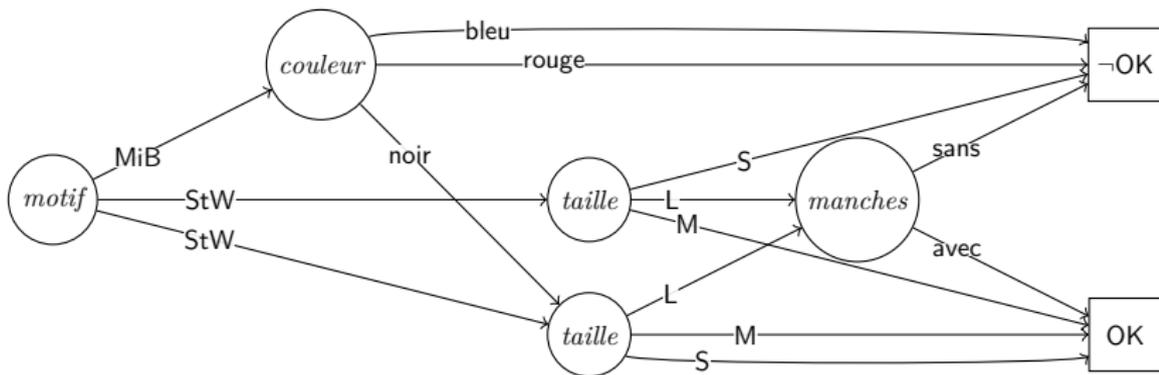
- Comment interpréter une telle instantiation ?

- on privilégie une feuille
- majorité
- parité...

→ On garde la sémantique NNF : la feuille « vrai » prévaut

Format automate

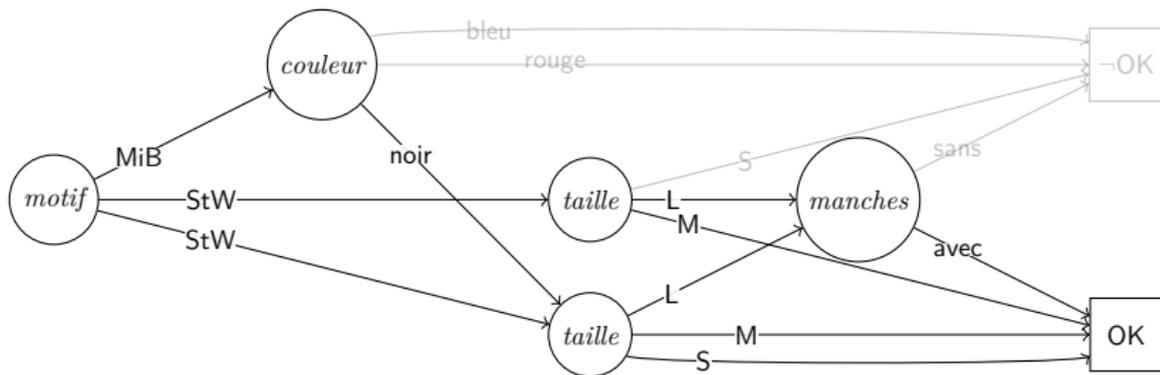
- On peut voir le MDD comme un automate :



- Choix sans conséquence, en effet dans le cas déterministe, le format « automate » et le format « diagramme de décision » sont équivalents

Format automate

- On peut voir le MDD comme un automate :



- Choix sans conséquence, en effet dans le cas déterministe, le format « automate » et le format « diagramme de décision » sont équivalents

Relaxation du déterminisme : opérations

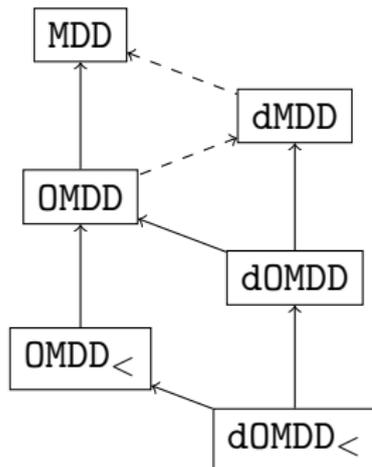
L	CO	VA	MC	CE	IM	EQ	SE	MX	CX	CT	ME
MDD	○	○	✓	○	○	○	○	○	○	○	○
dMDD	○	○	✓	○	○	○	○	○	○	○	○
OMDD	✓	○	✓	✓	○	○	○	✓	✓	○	✓
dOMDD	✓	✓	✓	✓	✓	✓	○	✓	✓	✓	✓
OMDD _{<}	✓	○	✓	✓	○	○	○	✓	✓	○	✓
dOMDD _{<}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

L	CD	TR	FO	SFO	EN	SEN	∨C	∨BC	∧C	∧BC	¬C
MDD	✓	○	○	✓	○	✓	✓	✓	✓	✓	?
dMDD	✓	○	○	✓	○	✓	✓	✓	✓	✓	✓
OMDD	✓	✓	✓	✓	○	○	?	?	○	○	○
dOMDD	✓	●	●	●	●	●	●	○	●	○	✓
OMDD _{<}	✓	✓	✓	✓	○	○	✓	✓	○	✓	○
dOMDD _{<}	✓	●	●	●	●	●	●	✓	●	✓	✓

- Plus de transformations (mais on perd la négation)
- Moins de requêtes, mais CO, CE et ME sont toujours supportées

Relaxation du déterminisme : concision

- Relâcher le déterminisme améliore la concision

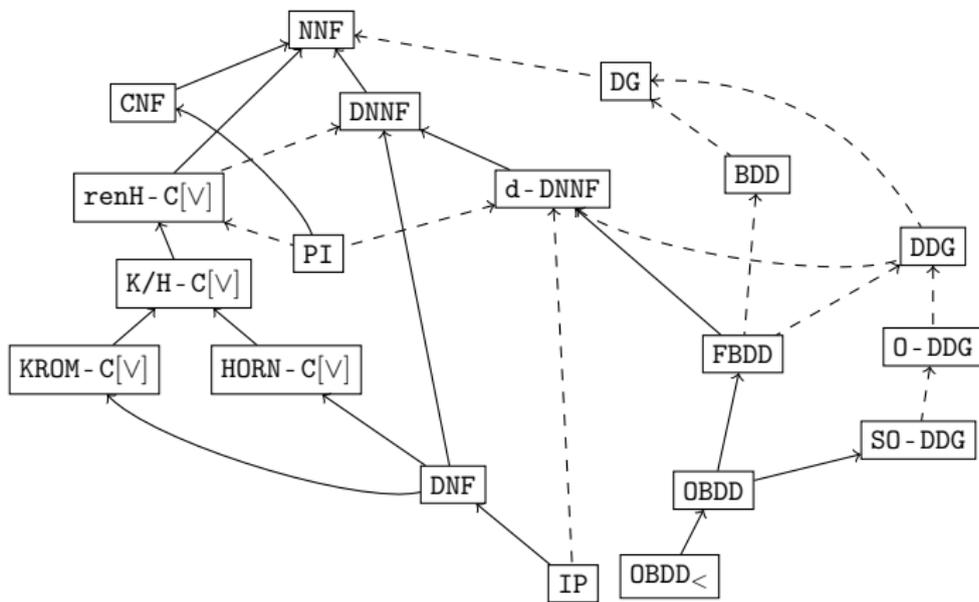


$L_1 \longleftarrow L_2$: L_1 est strictement plus concis que L_2

$L_1 \dashleftarrow L_2$: L_1 est « plus concis » que L_2

Relaxation du déterminisme : concision

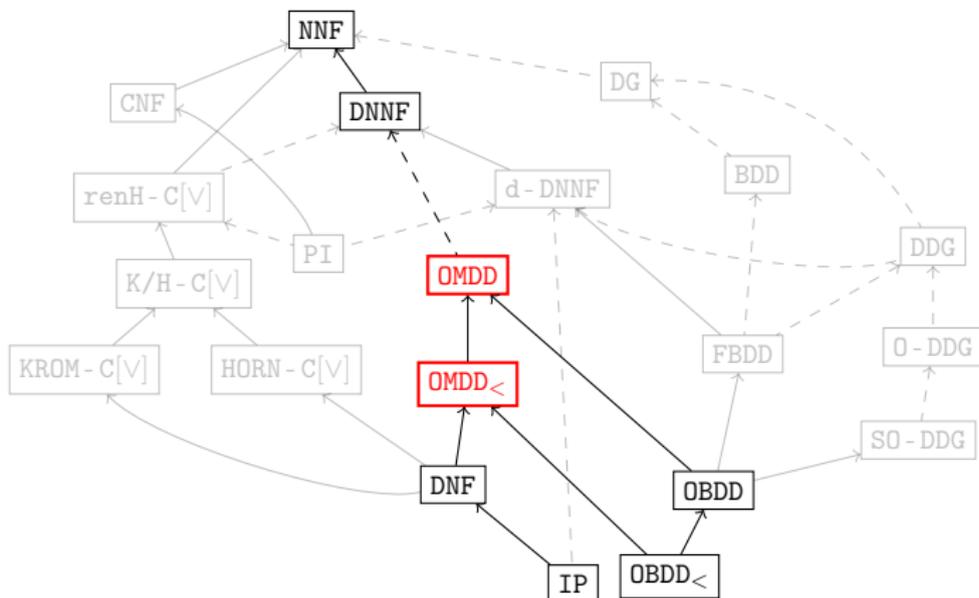
- Position intéressante dans la carte booléenne



$L_1 \leftarrow L_2$: L_1 est strictement plus concis que L_2
 $L_1 \leftarrow\!\!\!-\ L_2$: L_1 est « plus concis » que L_2

Relaxation du déterminisme : concision

- Position intéressante dans la carte booléenne



$L_1 \leftarrow L_2$: L_1 est strictement plus concis que L_2
 $L_1 \leftarrow\!\!\!-\! L_2$: L_1 est « plus concis » que L_2

Expérimentations

- Compilation de CSPs binaires générés aléatoirement (15 variables, domaine de taille 6)

%T	%C	#SOL	#N OMDD	#N dOMDD
70	10	290888073	80	81
	20	136056826	1338	1558
	30	5006576	5662	8132
	40	95131	3315	5005
	50	2367	737	897
80	20	1581648506	2572	2932
	30	189551100	12223	16370
	40	11557737	20501	35486
	50	1035884	13815	25240
	60	70185	5776	9253
	70	4662	1719	2246
	80	229	54	401

Conclusion

- Contributions :
 - étude de la relaxation du non-déterminisme dans les diagrammes de décision
 - carte de compilation des MDDs non-déterministes
 - le fragment $OMDD_{<}$ est susceptible d'être utilisé en ligne dans des applications de type configuration interactive (ou planification, diagnostic...)
 - les résultats expérimentaux montrent que l'intérêt n'est pas que théorique

Conclusion

- Contributions :
 - étude de la relaxation du non-déterminisme dans les diagrammes de décision
 - carte de compilation des MDDs non-déterministes
 - le fragment $OMDD_{<}$ est susceptible d'être utilisé en ligne dans des applications de type configuration interactive (ou planification, diagnostic...)
 - les résultats expérimentaux montrent que l'intérêt n'est pas que théorique
- Perspectives :
 - relaxation de l'ordre : étude des MDDs non-déterministes read-once
 - ajout de nœuds « et » : AOMDDs non-déterministes
 - comment compiler des MDDs non-déterministes directement ?